

庆祝王斯雷教授85岁华诞

一类平移不变实值信号无相重构的存在性与稳定性

陈洋^①, 成诚^②, 孙颀彧^{③*}

① 高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室, 湖南师范大学数学与统计学院, 长沙, 410081;

② 杜克大学数学系, 美国, 27708;

③ 中佛罗里达大学数学系, 美国, 32816.

E-mail: ychenmath@hunnu.edu.cn, cheng87@math.duke.edu, qiyu.sun@ucf.edu

收稿日期: 20XX-XX-XX; 接受日期: 20XX-XX-XX; 网络出版日期: 20XX-XX-XX *通信作者
湖南省重点学科建设项目, 湖南省自然科学基金青年基金(批准号: 2018JJ3329)及湖南师范大学博士科研启动金(批准号: 5311203258)资助项目

摘要

本文研究了在采样密度有限的集合上对平移不变实值信号的无相重构, 并提出了稳定的算法来实现信号的重构. 最后我们用一些数值实验来证实该无相重构算法的稳定性.

关键词 无相重构 平移不变空间 采样密度

MSC (2010) 主题分类 94A20 42A99 42C15

1 引言

信号的无相重构研究了怎样利用信号的幅度信息 $y = |Ax|$ 恢复未知信号 x 的问题. 特别地, 当 A 为傅立叶变换矩阵, 无相重构即为相位恢复, 读者可参看文献 [1] – [2] 及其中相关文献了解其相关进展. 无相重构广泛应用于物理学习和工程研究等领域. 比如在晶体学、光学、天文学、语音识别中, 探测器接受到的信息只有幅度, 携带重要信息的相位在传递过程中或已被扰乱甚至丢失 [3] – [6]. 此时, 若要重构原信号, 我们需要知道信号额外的信息, 比如稀疏性, 非负性等, 来恢复信号 [2].

2006年 Balan 等人从框架理论的观点研究了如何利用观测矩阵 A 的性质刻画信号的相位恢复 [7]. 而后涌现出许多利用一般框架研究相位恢复的工作, 如稀疏相位恢复, 仿射相位恢复等 [8] – [11]. 2014年 Bandeira 等人证明了有限维(离散)信号相位恢复的存在性和稳定性是并存的 [12]. 而2016年, Cahill 等人指出无限维空间中信号的相位恢复与有限维情形有很大区别 [13], 并提出了无限维可分希尔伯特空间中信号的相位恢复不是一致稳定的. Alaifari 等人也证明了过采样不能改善相位恢复的一致稳定性 [14] – [16]. 2016年我们给出了连续(无限维)信号能实现相位恢复当且仅当它是不可分的. 在此, 线性空间 V 中信号 f 是可分的是指存在非零信号 $f_1, f_2 \in V$ 使得 $f = f_1 + f_2$ 且 $f_1 f_2 = 0$ [17] – [18].

实际生活中的信号大多是能量有限的, 并且具有时平移不变性. 平移不变信号被认为是一个合理的用于模拟现实信号的模型. 平移不变空间也广泛应用于逼近论、小波理论、采样理论等方面的研究,

英文引用格式: Chen Y, Cheng C, Sun Q Y. A phaseless reconstruction algorithm for real-valued signals in a shift-invariant space (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 1–XX, doi: 10.1360/012016-XXX

但平移不变空间中信号的无相重构是一个高度非线性的无限维问题. 设 ϕ 为具有紧支集的实值连续函数, 定义其支集的长度

$$N := \min_{N_1, N_2 \in \mathbb{Z}} \{N_2 - N_1, \phi(t) = 0, t \notin [N_1, N_2]\} \quad (1.1)$$

及由它生成的实平移不变空间

$$V(\phi) := \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \phi(\cdot - k), c(k) \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.2)$$

给定离散点集 $X \subset \mathbb{R}$, 定义其上采样密度

$$D_+(X) := \limsup_{R \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\#(X \cap B(x, R))}{R^d} \quad (1.3)$$

和下采样密度

$$D_-(X) := \liminf_{R \rightarrow +\infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\#(X \cap B(x, R))}{R^d}. \quad (1.4)$$

如果集合 X 的上采样密度 $D_+(X)$ 和下采样密度 $D_-(X)$ 相等, 则定义其采样密度为

$$D(X) := D_+(X) = D_-(X).$$

当 ϕ 满足适当的条件, 我们在文献 [17] 中提出了稳定的无相重构算法. 此算法可在密度为 $2N - 1$ 的采样集合上恢复实值不可分信号. 最近, 孙文昌证明了可在密度为 2 的采样集合上实现实值不可分样条信号的无相恢复 [19]. 我们自然地想到能否降低采样密度, 仍然实现 $V(\phi)$ 中所有不可分信号的相位恢复. 本文在文献 [17] 中的算法的基础上, 提出新的算法来实现在采样密度为 N 的集合上对平移不变实值不可分信号的无相重构.

在实际应用中, 人们接受到的数据往往已被噪声干扰, 从而在这种带噪声的环境下如何得到(次)最优的信号重构是非常重要的. 在有限维空间中, 已有许多算法被用于进行相位恢复, 读者可参见文献 [20] - [25] 了解其相关进展. 本文在第三节中建立了在含噪环境下, 利用所提的新算法实现平移不变实值不可分信号无相重构的稳定性. 并在第四节中用数值实验证实了含噪环境下该算法对平移不变实值不可分信号进行无相重构具有稳定性.

2 平移不变空间中的非均匀采样

设平移不变空间 $V(\phi)$ 的生成元 ϕ 是具有紧支集的实值连续函数, 且其支集的长度 $N \geq 2$. 不失一般性, 我们可设

$$\text{当 } t \notin [0, N] \text{ 时, } \phi(t) = 0, \quad (2.1)$$

否则用某个 $\phi(\cdot - N_0)$, $N_0 \in \mathbb{Z}$, 替代 ϕ .

在文献 [17] 中, 我们注意到不是所有的实值信号 $f \in V(\phi)$ 在模去整体相位 ± 1 的意义下, 能够由全时域上的无相观测 $|f(t)|$, $t \in \mathbb{R}$ 唯一确定. 在此文中, 我们给出了能实现无相重构的平移不变实值信号的刻画.

定理 2.1 [17] 若 ϕ 是具有紧支集的实值连续函数, $V(\phi)$ 是由 ϕ 生成的实值平移不变空间. 那么在模去整体相位 ± 1 的意义下, 信号 $f \in V(\phi)$ 能由 $|f(t)|$, $t \in \mathbb{R}$ 唯一确定的充分必要条件是 f 是不可分的, 即不存在非零信号 $f_1, f_2 \in V(\phi)$ 使得 $f = f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2 = 0$.

Thakur 证明了带限信号能在采样密度为两倍奈奎斯特率的集合上实现无相重构 [26]. 在平移不变空间 $V(\phi)$ 中, 当具有紧支集的生成元 ϕ 满足一定条件时, 我们实现了在采样密度为 $2N - 1$ 的离散集合上对实值不可分信号的无相重构 [17]. 我们自然地想到能否降低采样密度, 仍然实现 $V(\phi)$ 中所有不可分信号的无相重构. 在如下定理中, 我们建立了对 $V(\phi)$ 中实值不可分信号在采样密度为 N 的集合上的无相重构.

定理 2.2 假设 ϕ 是满足式 (2.1) 的实值连续函数且其支集长度 $N \geq 2$. 取 $V(\phi)$ 中的非零实值信号记作 $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\phi(t - k)$, 和集合 $X := \{x_m, 1 \leq m \leq 2N - 1\} \subset (0, 1)$, $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} \subset X$ 和 $\Gamma^* := \{\gamma_1^*, \dots, \gamma_N^*\} \subset X$ 使得矩阵

$$\Phi = (\phi(x_m + n - 1))_{1 \leq m \leq 2N-1, 1 \leq n \leq N} \tag{2.2}$$

的所有 $N \times N$ 子矩阵是非奇异的,

$$\phi(\gamma_n) \neq 0, \quad 1 \leq n \leq N, \tag{2.3}$$

且

$$\phi(\gamma_n^* + N - 1) \neq 0, \quad 1 \leq n \leq N. \tag{2.4}$$

那么在模去整体相位 ± 1 的意义下, 信号 f 能由采样密度为 N 的集合 $Y_\infty := X \cup (\Gamma + \mathbb{Z}_+) \cup (\Gamma^* + \mathbb{Z}_-)$ 上的无相样本 $|f(y)|, y \in Y_\infty$ 唯一确定的充分必要条件是信号 f 在 $V(\phi)$ 中是不可分的.

为证明定理 2.2, 我们还需要如下引理.

引理 2.3 若 ϕ 满足定理 2.2 的条件, 对任意的非零实值信号 $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\phi(t - k) \in V(\phi)$, 记 $K_-(f) = \inf\{k, c(k) \neq 0\}$ 和 $K_+(f) = \sup\{k, c(k) \neq 0\}$. 那么该信号 f 是不可分的当且仅当

$$\sum_{l=0}^{N-2} |c(k+l)|^2 \neq 0$$

对任意的 $K_-(f) - N + 1 < k < K_+(f) + 1$ 成立.

该引理由文献 [17] 中定理 3.2 即得.

引理 2.4 若 ϕ, Γ 和 Γ^* 满足定理 2.2 的条件. 那么对任意的非零向量 $(a(1), \dots, a(N-1))$, 矩阵

$$\begin{pmatrix} \phi(\gamma_1) & \dots & \phi(\gamma_N) \\ \sum_{l=1}^{N-1} a(l)\phi(\gamma_1+l) & \dots & \sum_{l=1}^{N-1} a(l)\phi(\gamma_N+l) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

和

$$\begin{pmatrix} \phi(\gamma_1^* + N - 1) & \dots & \phi(\gamma_N^* + N - 1) \\ \sum_{l=1}^{N-1} a(l)\phi(\gamma_1^* + l - 1) & \dots & \sum_{l=1}^{N-1} a(l)\phi(\gamma_N^* + l - 1) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

的秩都为 2.

证明: 我们首先利用反证法证明矩阵 (2.5) 的秩为 2. 假设存在非零向量 $(a(1), \dots, a(N-1))$ 和常数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\sum_{l=1}^{N-1} a(l)\phi(\gamma_n+l)}{\phi(\gamma_n)} = \alpha, \quad 1 \leq n \leq N.$$

因为矩阵 $(\phi(\gamma_n + l - 1))_{1 \leq n, l \leq N}$ 是非奇异的, 我们可得 $(-\alpha, a(1), \dots, a(N-1))$ 是零向量. 这产生了矛盾!

同理, 我们可以证明式 (2.6) 中的矩阵的秩也为 2.

引理 2.5 若 ϕ 和 X 满足定理 2.2 的条件, 任取 $V(\phi)$ 中一实值信号 $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\phi(t-k)$. 则在模去整体相位 ± 1 的意义下, 对任意的 $l \in \mathbb{Z}$, 系数 $c(k)$, $l-N+1 \leq k \leq l$ 能由无相样本 $|f(x_m+l)|$, $x_m \in X$ 唯一确定.

该引理由文献 [17] 中定理 3.1 的证明即得.

写着 $\Gamma = \{\gamma_n, 1 \leq n \leq N\}$ 和 $\Gamma^* = \{\gamma_n^*, 1 \leq n \leq N\}$. 对 $\mathbf{e}_i = (e_i(1), \dots, e_i(N)) \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, 定义如下函数

$$h_1(\mathbf{e}_1) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2 & \sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n)e_1(n) \\ \sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n)e_1(n) & \sum_{n=1}^N |e_1(n)|^2 \end{vmatrix}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2} \quad (2.7)$$

和

$$h_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2 & \sum_{n=1}^N e_2(n) \\ \sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n)e_1(n) & \sum_{n=1}^N \frac{e_1(n)e_2(n)}{\phi(\gamma_n)} \end{vmatrix}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2}. \quad (2.8)$$

下面我们开始定理 2.2 的证明.

定理 2.2 的证明: 必要性: 由定理 2.1 可直接推得.

充分性: 设信号 $f(t) = \sum_{k=K_-(f)}^{K_+(f)} c(k)\phi(t-k) \in V(\phi)$ 是不可分的, 简记 $K_{\pm} = K_{\pm}(f)$. 由引理 2.3 可知对任意的 $K_- - N + 1 < k < K_+ + 1$, 都有

$$\sum_{l=0}^{N-2} |c(k+l)|^2 \neq 0. \quad (2.9)$$

下面我们将证明分成三种情况: $K_- \leq 0 \leq K_+ + N - 1$, $K_- \geq 1$ 和 $K_+ \leq -N$.

情形 1: $K_- \leq 0 \leq K_+ + N - 1$.

由式 (2.9) 可知, 存在 $-N + 2 \leq l_0 \leq 0$ 使得 $c(l_0) \neq 0$ 且对任意的 $l_0 < l \leq 0$, $c(l) = 0$. 不失一般性, 可以假设

$$c(l_0) > 0 \text{ 且 } c(l) = 0 \text{ 且对任意的 } l_0 < l \leq 0, \quad (2.10)$$

否则可用 $-f$ 代替 f . 由式 (2.10) 和引理 2.5 可知,

$$c(-N+1), \dots, c(-1), c(0) \quad (2.11)$$

可由无相样本 $|f(x)|$, $x \in X$ 唯一确定. 接下来我们用数学归纳法证明

$$\text{系数 } c(k), k \geq 1 \text{ 可由 } |f(\gamma+q)|, \gamma \in \Gamma, q \in \mathbb{Z}_+ \text{ 唯一确定.} \quad (2.12)$$

假设 $c(k)$, $1 \leq k < p$ 由 $|f(\gamma+q)|$, $\gamma \in \Gamma$, $1 \leq q < p$ 唯一确定. 如果 $p > K_+$, 结论 (2.12) 已证好. 现只需考虑 $p \leq K_+$.

对 $\gamma_n \in \Gamma$ 和 $1 \leq n \leq N$, 我们有

$$f(\gamma_n + p) = c(p)\phi(\gamma_n) + \sum_{l=1}^{N-1} c(p-l)\phi(\gamma_n + l) =: c(p)\phi(\gamma_n) + \alpha(n). \quad (2.13)$$

利用式 (2.3), 并对上式两边平方后同时除以 $\phi(\gamma_n)$, 可得

$$\phi(\gamma_n)(c(p))^2 + 2\alpha(n)c(p) = \frac{|f(\gamma_n + p)|^2 - |\alpha(n)|^2}{\phi(\gamma_n)}. \quad (2.14)$$

因 $K_- < p \leq K_+$, 由式 (2.9) 可得 $(c(p-N+1), \dots, c(p-1))$ 是非零向量. 因此由引理 2.3 可知, $2 \times N$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \phi(\gamma_1) & \cdots & \phi(\gamma_N) \\ \alpha(1) & \cdots & \alpha(N) \end{pmatrix}$ 的秩为 2. 因此线性方程组 (2.14) 有唯一解

$$c(p) = \frac{h_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})}{2h_1(\boldsymbol{\alpha})}, \quad (2.15)$$

其中 h_1, h_2 分别是由式 (2.7) 和 (2.8) 给出的, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha(1), \dots, \alpha(N))$, 且

$$\boldsymbol{\eta} = (|f(\gamma_1 + p)|^2 - |\alpha(1)|^2, \dots, |f(\gamma_N + p)|^2 - |\alpha(N)|^2).$$

结论 (2.12) 得证. 类似地, 我们可用数学归纳法证明 $c(k), k < -N+1$ 能由 $|f(\gamma^* + q)|, \gamma^* \in \Gamma^*, q \in \mathbb{Z}_-$ 唯一确定.

情形 2: $K_- \geq 1$.

由 K_- 的定义可知, 此时 $\text{supp} f \subset [1, \infty)$. 不失一般性, 我们假设 $c(K_-) > 0$, 否则可用 $-f$ 代替 f . 由 ϕ 的支集性质可知

$$f(\gamma_n + K_-) = c(K_-)\phi(\gamma_n), \quad \gamma_n \in \Gamma, 1 \leq n \leq N.$$

求解上述方程组, 可得

$$c(K_-) = \frac{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)| |f(\gamma_n + K_-)|}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2}. \quad (2.16)$$

类似于情形 1, 我们可用数学归纳法证明 $c(k), k \geq K_-$ 能由 $|f(\gamma + q)|, \gamma \in \Gamma, q \in \mathbb{Z}_+$ 唯一确定.

情形 3: $K_+ \leq -N$.

由 K_+ 的定义可知, 此时 $\text{supp} f \subset (-\infty, 0]$. 类似于情形 2 中由式 (2.16) 确定 $c(K_-)$ 的方式, 在模去整体相位 ± 1 的意义下, $c(K_+)$ 可由 $|f(\gamma^* + K_+ + N - 1)|, \gamma^* \in \Gamma^*$ 唯一确定. 接着同情形 1, 可用数学归纳法证明 $c(k), k \leq K_+ \leq -N$ 能由 $|f(\gamma^* + q)|, \gamma \in \Gamma^*, q \in \mathbb{Z}_-$ 唯一确定.

综合如上三种情形, 即完成了定理 2.2 中充分性的证明.

3 无相重构算法及其稳定性

本节将在定理 2.2 的证明基础上, 提出一个无相重构算法. 并考虑采样过程被有界加性噪声干扰的情况下, 此算法对平移不变实值不可分信号进行无相重构过程的稳定性.

给定奇数 $L \geq 1$, 定义采样集合

$$Y_L := \left(X \cup \left\{ \Gamma + l, \Gamma^* - l', 1 \leq l, l' \leq \frac{L-1}{2} \right\} \right) + LZ. \quad (3.1)$$

对平移不变空间 $V(\phi)$ 中的信号 $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\phi(\cdot - k)$, 定义

$$S_f := \inf_{K_-(f)-N+1 < k < K_+(f)+1} \sum_{l=0}^{L-2} |c(k+l)|^2 \quad (3.2)$$

和

$$M_f := \inf_{K_-(f)-N+1 < k < K_+(f)+1} \frac{\sum_{l=0}^{N-2} |c(k+l)|^2}{\sum_{l=-1}^{N-1} |c(k+l)|^2}. \quad (3.3)$$

在信号 f 被有界噪声干扰的环境下, 我们得到的含噪无相样本为

$$z_\epsilon(y) = |f(y)|^2 + \epsilon(y), \quad y \in Y_L, \quad (3.4)$$

其中 Y_L 如式 (3.1) 中定义, $\epsilon = \{\epsilon(y), y \in Y_L\}$ 且

$$|\epsilon| := \sup\{|\epsilon(y)|, y \in Y_L\} < \infty.$$

设 X, Γ, Γ^* 满足定理 2.2 的条件, 记

$$\|(\Phi_N)^{-1}\| := \sup_{m_0 < \dots < m_{N-1}} \left\| \left((\phi(x_{m_l} + n))_{0 \leq l, n \leq N-1} \right)^{-1} \right\|, \quad (3.5)$$

其中矩阵 A 的范数定义为 $\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$. 并令

$$\gamma_n^{**} = \gamma_n^* + N - 1, \quad \gamma_n^* \in \Gamma^*, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.6)$$

对 $\mathbf{e}_i = (e_i(1), \dots, e_i(N)) \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, 定义如下函数

$$h_1^*(\mathbf{e}_1) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n^{**})|^2 & \sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n^{**}) e_1(n) \\ \sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n^{**}) e_1(n) & \sum_{n=1}^N |e_1(n)|^2 \end{vmatrix}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n^{**})|^2} \quad (3.7)$$

和

$$h_2^*(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n^{**})|^2 & \sum_{n=1}^N e_2(n) \\ \sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n^{**}) e_1(n) & \sum_{n=1}^N \frac{e_1(n) e_2(n)}{\phi(\gamma_n^{**})} \end{vmatrix}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n^{**})|^2}. \quad (3.8)$$

由定理 2.2 构造性的证明过程, 我们提出如下 MEPS 算法来实现实值不可分信号 $f \in V(\phi)$ 的无相重构.

1) 极小化(Minimization). 对任意 $k' \in \mathbb{Z}$, 和 $x_m \in X$, $1 \leq m \leq 2N - 1$, 令 $x_{m,k'} = x_m + k'L$ 以及

$$\mathbf{c}_{\epsilon, k'} = (c_{\epsilon, k'}(k))_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (3.9)$$

其中分量 $c_{\epsilon, k'}(k)$, $k'L - N + 1 \leq k \leq k'L$, 是下述极小化问题

$$\min_{m=1}^{2N-1} \left| \left| \sum_{k=k'L-N+1}^{k'L} c(k)\phi(x_{m,k'} - k) \right| - \sqrt{z_\epsilon(x_{m,k'})} \right|^2 \quad (3.10)$$

的解, 其余分量设为 0, 参见文献 [27] - [30].

2) 延拓(Extension). 给定阈值 $M_0 \geq 0$. 对 $k' \in \mathbb{Z}$, 当 $1 \leq l \leq (L-1)/2$ 时, 令 $\alpha_{\epsilon,l} = (\alpha_{\epsilon,l}(1), \dots, \alpha_{\epsilon,l}(N))$, 其中

$$\alpha_{\epsilon,l}(n) = \sum_{m=1}^{N-1} c_{\epsilon,k'}(k'L + l - m)\phi(\gamma_n + m), \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N.$$

我们需要按如下准则更新 $c_{\epsilon,k'}$ 的分量:

a) 若 $|h_1(\alpha_{\epsilon,l})| \leq M_0$. 求出线性方程组

$$x|\phi(\gamma_n)| = \sqrt{z_{\epsilon}(\gamma_n + k'L + l)}, \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.11}$$

的最小二乘解 x , 并用 x 来替换分量 $c_{\epsilon,k'}(k'L + l)$.

b) 若 $|h_1(\alpha_{\epsilon,l})| > M_0$. 求出线性方程组

$$\frac{|x\phi(\gamma_n) + \alpha_{\epsilon,l}(n)|^2}{\phi(\gamma_n)} = \frac{z_{\epsilon}(\gamma_n + k'L + l)}{\phi(\gamma_n)}, \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.12}$$

的最小二乘解 y , 并记

$$\tilde{z}_{\epsilon}(k'L + l + \gamma_n) := \sqrt{z_{\epsilon}(\gamma_n + k'L + l)} \operatorname{sgn}(\alpha_{\epsilon,l}(n) + y\phi(\gamma_n)). \tag{3.13}$$

最后由线性方程组

$$\sum_{m=0}^{N-1} d(k'L + l - m)\phi(\gamma_n + m) = \tilde{z}_{\epsilon}(k'L + l + \gamma_n), \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.14}$$

求解 $d(k'L + l - m), 0 \leq m \leq N-1$, 并依次用来替换分量 $c_{\epsilon,k'}(k'L + l - m), 0 \leq m \leq N-1$.

3) 对 $k' \in \mathbb{Z}$, 当 $1 \leq l' \leq (L-1)/2$, 令

$$\alpha_{\epsilon,l}^*(n) = \sum_{n'=1}^{N-1} c_{\epsilon,k'}(k'L - l' - n')\phi(\gamma_n^* + n'), \quad \gamma_n^* \in \Gamma^*, \quad 1 \leq n \leq N,$$

并记 $\alpha_{\epsilon,l'}^* = (\alpha_{\epsilon,l'}^*(1), \dots, \alpha_{\epsilon,l'}^*(N))$. 我们按如下方式更新 $c_{\epsilon,k'}$ 的分量:

a) 若 $|h_1^*(\alpha_{\epsilon,l'})| \leq M_0$. 找出线性方程组

$$x|\phi(\gamma_n^{**})| = \sqrt{z_{\epsilon}(\gamma_n^{**} + k'L - l')}, \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.15}$$

的最小二乘解 x , 其中 $\gamma_n^{**}, 1 \leq n \leq N$ 是由式 (3.6) 定义的. 然后用 x 来替换分量 $c_{\epsilon,k'}(k'L + 1 - N - l')$.

b) 若 $|h_1^*(\alpha_{\epsilon,l'})| > M_0$. 找出线性方程组

$$\frac{|y\phi(\gamma_n^{**}) + \alpha_{\epsilon,l'}^*(n)|^2}{\phi(\gamma_n^{**})} = \frac{z_{\epsilon}(\gamma_n^{**} + k'L - l')}{\phi(\gamma_n^{**})}, \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.16}$$

的最小二乘解 y , 其中 $\gamma_n^{**}, 1 \leq n \leq N$ 是由式 (3.6) 定义的. 并记

$$\tilde{z}_{\epsilon}(k'L - l' + \gamma_n^*) = \sqrt{z_{\epsilon}(k'L - l' + \gamma_n^*)} \operatorname{sgn}(\alpha_{\epsilon,l'}^*(n) + y\phi(\gamma_n^{**})). \tag{3.17}$$

最后用线性方程组

$$\sum_{m=0}^{N-1} d(k'L - l' - m)\phi(\gamma_n^* + m) = \tilde{z}_{\epsilon}(k'L - l' + \gamma_n^*), \quad \gamma_n^* \in \Gamma^*, \quad 1 \leq n \leq N \tag{3.18}$$

求解 $d(k'L - l' - m), 0 \leq m \leq N - 1$, 并依次用来替换分量 $c_{\epsilon, k'}(k'L - l' - m), 0 \leq m \leq N - 1$.

对任意的 $k' \in \mathbb{Z}$, 关于 l 和 l' 的循环结束后, 我们得到一系列新的向量 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}, k' \in \mathbb{Z}$. 而后进行下述程序.

4) 相位调整(Phase adjustment). 调整向量 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}, k' \in \mathbb{Z}$ 的相位使得

$$\langle \mathbf{c}_{\epsilon, k'}, \mathbf{c}_{\epsilon, k'+1} \rangle \geq 0 \quad (3.19)$$

对所有的 $k' \in \mathbb{Z}$ 都成立.

5) 粘合(Sewing). 记 $[q]$ 为不超过 q 的最大整数. 利用调整好的向量 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}, k' \in \mathbb{Z}$ 构成新的向量 $\mathbf{c}_{\epsilon} = (c_{\epsilon}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, 使得

$$c_{\epsilon}(k) = \mathbf{c}_{\epsilon, k'}(k) \quad (3.20)$$

其中 $k' = \lfloor (2k + L - 1)/(2L) \rfloor, k \in \mathbb{Z}$.

在模去整体相位 ± 1 的意义下, 若在没有噪声的环境下, MEPS 算法阈值 M_0 可取零值. 此时, 可实现 $V(\phi)$ 中不可分信号的精确恢复. 在带噪声的环境下, 由下述定理可知对 $V(\phi)$ 中不可分信号, MEPS 算法具有稳定性.

定理 3.1 若 $\phi, X, \Gamma, \Gamma^*$ 满足定理 2.2 中的条件, Y_L, S_f, M_f 由式 (3.1), (3.2) 和 (3.3) 定义. 设平移不变实值不可分信号 $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\phi(t - k) \in V(\phi)$ 满足

$$S_f > 0 \quad \text{且} \quad M_f > 0. \quad (3.21)$$

取阈值

$$M_0 = \frac{S_f}{4\|(\Phi_N)^{-1}\|^2}, \quad (3.22)$$

并记根据 MEPS 算法由采样集合 Y_L 上的无相样本重构的信号为 $f_{\epsilon}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{\epsilon}(k)\phi(t - k)$. 若

$$|\epsilon| \leq \frac{S_f}{2^7 N^3 \|(\Phi_N)^{-1}\|^2 (C_{f, \phi})^{4N+L-5}}, \quad (3.23)$$

则存在整体相位 $\delta \in \{-1, 1\}$, 使得对任意的 $k \in \mathbb{Z}$ 都有

$$|c_{\epsilon}(k) - \delta c(k)| \leq N \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{N-1+(L-1)/2} \sqrt{8|\epsilon|} \quad (3.24)$$

成立, 其中

$$C_{f, \phi} = \frac{2^8 \|\Phi\|^4 \|(\Phi_N)^{-1}\|^3}{M_f \cdot \min_{1 \leq n \leq N} \{|\phi(\gamma_n)|, |\phi(\gamma_n^* + N - 1)|\}}. \quad (3.25)$$

若用信号的误差

$$E(\epsilon) := \min_{\delta \in \{-1, 1\}} \|f_{\epsilon}(t) - \delta f(t)\|_{\infty}$$

衡量 MEPS 算法的次优性, 则由 (3.24) 知, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$E(\epsilon) \leq N \|\phi\|_{\infty} \min_{\delta \in \{-1, 1\}} \max_{k \in \mathbb{Z}} |c_{\epsilon}(k) - \delta c(k)| \leq C \sqrt{|\epsilon|}. \quad (3.26)$$

我们把定理 3.1 的证明分解为下述四个命题, 它们分别对应于 MEPS 算法中第一步至第四步的稳定性讨论. 将 MEPS 算法第一步得到的向量记为 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^0 = (c_{\epsilon, k'}^0(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, $k' \in \mathbb{Z}$. 在文献 [17] 中我们已建立 MEPS 算法第一步的稳定性.

命题 3.2 [17] 若 \mathbf{c}, ϵ 满足定理 3.1 的条件. 则对任意的 $k' \in \mathbb{Z}$, 存在 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 使得

$$\sum_{k=k'L-N+1}^{k'L} |c_{\epsilon, k'}^0(k) - \delta_{k'} c(k)|^2 \leq 8N \|(\Phi_N)^{-1}\|^2 |\epsilon| \quad (3.27)$$

成立.

将 MEPS 算法第二步得到的向量记为 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^{1/2} = (c_{\epsilon, k'}^{1/2}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, $k' \in \mathbb{Z}$. 我们有下面的误差估计.

命题 3.3 若 \mathbf{c}, ϵ 满足定理 3.1 的条件. 则对任意的 $k' \in \mathbb{Z}$, 存在 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 使得

$$|c_{\epsilon, k'}^{1/2}(k) - \delta_{k'} c(k)| \leq \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{k-k'L+N-1} \sqrt{8N|\epsilon|} \quad (3.28)$$

在 $k'L+1-N \leq k \leq k'L+(L-1)/2$ 时成立.

为证明命题 3.3, 我们先建立如下引理

引理 3.4 若 h_2 和 h_2^* 是式 (2.8) 和 (3.8) 定义的函数. 则对所有的 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^N$, 都有

$$|h_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| \leq \frac{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\|}{\min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|} \quad (3.29)$$

和

$$|h_2^*(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| \leq \frac{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\|}{\min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n^* + N - 1)|} \quad (3.30)$$

成立.

证明: 首先我们证明式 (3.29) 成立. 令 $\alpha = \frac{\sum_{n=1}^N e_2(n)}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2}$, 我们有

$$|h_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| \leq \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{e_2(n)}{\phi(\gamma_n)} - \alpha \phi(\gamma_n) \right|^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_1\| \leq \left(\sum_{n=1}^N \left| \frac{e_2(n)}{\phi(\gamma_n)} \right|^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_1\|.$$

这就得到了式 (3.29). 同理我们可以证明式 (3.30).

接下来, 我们证明命题 3.3.

命题 3.3 的证明: 对任意的 $k' \in \mathbb{Z}$, 令 $\mathbf{c}_{\epsilon, k', 0}^{1/2} = \mathbf{c}_{\epsilon, k'}^0$, 当 $1 \leq l \leq \frac{L-1}{2}$ 时, 将 $\mathbf{c}_{\epsilon, k', l}^{1/2}$ 定义为由式 (3.11) 和 (3.14) 所得的向量. 由 MEPS 算法的第二步可知, 当 $k'L-N+1 \leq k \leq k'L+\frac{L-1}{2}$ 时, 则对所有的 $l \geq \min\{k-k'L+N-1, \frac{L-1}{2}\}$, $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^{1/2}(k) = \mathbf{c}_{\epsilon, k', l}^{1/2}(k)$ 都成立. 因此我们只需证明存在 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 使得当 $0 \leq l \leq \frac{L-1}{2}$ 时,

$$\sum_{k=k'L+l+1-N}^{k'L+l} |c_{\epsilon, k', l}^{1/2}(k) - \delta_{k'} c(k)|^2 \leq 8N \|(\Phi_N)^{-1}\|^2 (C_{f, \phi})^{2l} |\epsilon| \quad (3.31)$$

成立. 我们将运用数学归纳法证明式 (3.31).

当 $l=0$ 时, 由命题 3.2 可知式 (3.31) 成立. 假设当 $0 \leq l=l_0 \leq (L-1)/2$ 时, 存在 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 使得

$$\sum_{k=k'L+l_0+1-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) - \delta_{k'} c(k)|^2 \leq 8N \|(\Phi_N)^{-1}\|^2 (C_{f, \phi})^{2l_0} |\epsilon| \quad (3.32)$$

成立. 当 $1 \leq n \leq N$, $\gamma_n \in \Gamma$ 时, 记

$$\alpha_{\epsilon}(n) := \sum_{l'=0}^{N-2} c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2} (k'L + l_0 - l') \phi(\gamma_n + l' + 1)$$

和

$$\alpha(n) := \sum_{l'=0}^{N-2} c(k'L + l_0 - l') \phi(\gamma_n + l' + 1).$$

令 $\mathbf{e}_{\epsilon, 1} = (\alpha_{\epsilon}(1), \dots, \alpha_{\epsilon}(N))$ 和 $\mathbf{e}_{0, 1} = (\alpha(1), \dots, \alpha(N))$. 下面我们将分两种情形来证明当 $l = l_0 + 1 \leq (L-1)/2$ 时, 式 (3.31) 也成立.

情形 1.
$$\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2 = 0.$$

令 $\alpha_{\epsilon}(0) = \frac{\sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n) \alpha_{\epsilon}(n)}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2}$ 和 $\alpha(0) = \frac{\sum_{n=1}^N \phi(\gamma_n) \alpha(n)}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2}$. 由式 (3.22), (3.23) 和 (3.32), 我们有

$$h_1(\mathbf{e}_{\epsilon, 1}) \leq \|\Phi\|^2 \sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k)|^2 \leq 8N \|\Phi\|^2 \|(\Phi_N)^{-1}\|^2 (C_{f, \phi})^{2l_0} |\epsilon| \leq M_0. \quad (3.33)$$

此时由式 (3.11) 即得

$$c_{\epsilon, k', l_0+1}^{1/2}(k'L + l_0 + 1) = \frac{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)| \sqrt{z_{\epsilon}(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2}. \quad (3.34)$$

且当 $k'L + l_0 + 2 - N \leq k \leq k'L + l_0$ 时,

$$c_{\epsilon, k', l_0+1}^{1/2}(k) = c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) \text{ 和 } c(k) = 0. \quad (3.35)$$

1) 若 $c(k'L + l_0 + 1) = 0$. 此时

$$z_{\epsilon}(\gamma_n + k'L + l_0 + 1) = \epsilon(\gamma_n + k'L + l_0 + 1), \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N.$$

则有

$$\begin{aligned} |c_{\epsilon, k', l_0+1}^{1/2}(k'L + l_0 + 1) - \delta_{k'} c(k'L + l_0 + 1)| &= \frac{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)| \sqrt{\epsilon(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2} \\ &\leq \|(\Phi_N)^{-1}\| \sqrt{N|\epsilon|}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

2) 若 $c(k'L + l_0 + 1) \neq 0$. 此时由式 (3.35), 可知当 $0 \leq l \leq l_0$ 时, 式 (3.31) 对任意的 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 成立. 令

$$\delta_{k'} = \frac{c(k'L + l_0 + 1)}{|c(k'L + l_0 + 1)|}.$$

则由式 (3.34), 不等式

$$|\sqrt{x^2 + y} - |x|| \leq \sqrt{|y|}, \quad (x \in \mathbb{R}, y \geq -x^2) \quad (3.37)$$

以及

$$f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1) = c(k'L + l_0 + 1) \phi(\gamma_n), \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N,$$

可得

$$\begin{aligned} & |c_{\epsilon, k', l_0+1}^{1/2}(k'L + l_0 + 1) - \delta_{k'}c(k'L + l_0 + 1)| \\ & \leq \frac{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)| \sqrt{|\epsilon(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)|}}{\sum_{n=1}^N |\phi(\gamma_n)|^2} \leq \|(\Phi_N)^{-1}\| \sqrt{N|\epsilon|}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

综合式 (3.32), (3.36) 和 (3.38), 我们证明了在情形 1 时, 式 (3.31) 对 $l = l_0 + 1$ 成立.

情形 2: $\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2 \neq 0$.

由假设 (3.32), 即存在 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 使得

$$\|\mathbf{e}_{\epsilon, 1} - \delta_{k'}\mathbf{e}_{0, 1}\| \leq \|\Phi\| \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{l_0} \sqrt{8N|\epsilon|}. \quad (3.39)$$

从而结合式 (3.23) 和

$$\|\Phi\| \|(\Phi_N)^{-1}\| \geq 1, \quad (3.40)$$

我们有

$$\|\mathbf{e}_{\epsilon, 1}\| \leq \|\mathbf{e}_{\epsilon, 1} - \delta_{k'}\mathbf{e}_{0, 1}\| + \|\mathbf{e}_{0, 1}\| \leq 2\|\Phi\| \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

由式 (3.21), (3.22), (3.23) 和 (3.32), 可得

$$h_1(\mathbf{e}_{\epsilon, 1}) \geq \|(\Phi_N)^{-1}\|^{-2} \sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k)|^2 \geq \frac{\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2}{4\|(\Phi_N)^{-1}\|^2} > M_0. \quad (3.42)$$

令 $\eta_{\epsilon}(n) = z_{\epsilon}(\gamma_n + k'L + l_0 + 1) - |\alpha_{\epsilon}(n)|^2$, $1 \leq n \leq N$, $\gamma_n \in \Gamma$, 和 $\mathbf{e}_{\epsilon, 2} = (\eta_{\epsilon}(1), \dots, \eta_{\epsilon}(N))$. 由式 (3.12) 即得

$$d_{\epsilon, k'}(k'L + l_0 + 1) = \frac{h_2(\mathbf{e}_{\epsilon, 1}, \mathbf{e}_{\epsilon, 2})}{2h_1(\mathbf{e}_{\epsilon, 1})}. \quad (3.43)$$

类似的, 令 $\epsilon = \mathbf{0}$. 当 $1 \leq n \leq N$, $\gamma_n \in \Gamma$ 时, 记 $\eta(n) := |f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)|^2 - |\alpha(n)|^2$ 和 $\mathbf{e}_{0, 2} := (\eta(1), \dots, \eta(N))$, 于是有

$$c(k'L + l_0 + 1) = \frac{h_2(\mathbf{e}_{0, 1}, \mathbf{e}_{0, 2})}{2h_1(\mathbf{e}_{0, 1})}. \quad (3.44)$$

下面估计误差 $|d_{\epsilon, k'}(k'L + l_0 + 1) - \delta_{k'}c(k'L + l_0 + 1)|$.

当 $\gamma_n \in \Gamma$, $1 \leq n \leq N$ 时, 记 $\beta_{\epsilon}(n) := \alpha_{\epsilon}(n) - \phi(\gamma_n)\alpha_{\epsilon}(0)$ 且 $\beta_0(n) := \alpha(n) - \phi(\gamma_n)\alpha(0)$. 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |\beta_{\epsilon}(n) - \delta_{k'}\beta_0(n)|^2 & \leq \sum_{n=1}^N \left| \sum_{l=0}^{N-2} \left(c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k'L + l_0 - l') - \delta_{k'}c(k'L + l_0 - l') \right) \phi(\gamma_n + l' + 1) \right|^2 \\ & \leq \|\Phi\|^2 \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) - \delta_{k'}c(k)|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

结合式 (3.23), (3.32) 和 (3.33), 即得

$$|h_1(\mathbf{e}_{\epsilon, 1}) - h_1(\mathbf{e}_{0, 1})|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \|\Phi\|^2 \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) - \delta_{k'} c(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) + \delta_{k'} c(k)|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq 3\sqrt{8N|\epsilon|} \|\Phi\|^2 \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{l_0} \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

另一方面,

$$\|\mathbf{e}_{0,2}\| \leq \sum_{n=1}^N |\eta(n)| \leq 2\|\Phi\|^2 \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0+1} |c(k)|^2 \right) \tag{3.47}$$

和

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}_{\epsilon,2} - \mathbf{e}_{0,2}\| &\leq \sum_{n=1}^N |\eta_{\epsilon}(n) - \eta(n)| \\
 &\leq \|\Phi\|^2 \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) - \delta_{k'} c(k)|^2 \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k) + \delta_{k'} c(k)|^2 \right)^{1/2} + N|\epsilon| \\
 &\leq 4\|\Phi\|^2 \|(\Phi_N)^{-1}\| \sqrt{8N|\epsilon|} (C_{f, \phi})^{l_0} \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

因此由式 (3.39), (3.41), (3.47), (3.48) 和引理 3.3 可得

$$\begin{aligned}
 &|h_2(\mathbf{e}_{\epsilon,1}, \mathbf{e}_{\epsilon,2}) - \delta_{k'} h_2(\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,2})| \\
 &\leq |h_2(\mathbf{e}_{\epsilon,1}, \mathbf{e}_{\epsilon,2} - \mathbf{e}_{0,2})| + |h_2(\mathbf{e}_{\epsilon,1} - \delta_{k'} \mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,2})| \\
 &\leq \frac{\|\mathbf{e}_{\epsilon,1}\| \|\mathbf{e}_{\epsilon,2} - \mathbf{e}_{0,2}\| + \|\mathbf{e}_{\epsilon,1} - \delta_{k'} \mathbf{e}_{0,1}\| \|\mathbf{e}_{0,2}\|}{\min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|} \\
 &\leq \frac{10\|\Phi\|^3 \|(\Phi_N)^{-1}\|}{\min_{1 \leq n \leq 2N-1} |\phi(\gamma_n)|} \sqrt{8N|\epsilon|} (C_{f, \phi})^{l_0} \left(\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0+1} |c(k)|^2 \right). \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

综合式 (3.42), (3.43), (3.44), (3.46) 和 (3.49), 我们有

$$\begin{aligned}
 &|d_{\epsilon, k'}(k'L + l_0 + 1) - \delta_{k'} c(k'L + l_0 + 1)| \\
 &\leq \frac{|h_2(\mathbf{e}_{\epsilon,1}, \mathbf{e}_{\epsilon,2}) - \delta_{k'} h_2(\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,2})|}{2h_1(\mathbf{e}_{\epsilon,1})} + \frac{|h_1(\mathbf{e}_{\epsilon,1}) - h_1(\mathbf{e}_{0,1})|}{h_1(\mathbf{e}_{\epsilon,1})} |c(k'L + l_0 + 1)| \\
 &\leq \left(\frac{20\|\Phi\|}{\min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|} + 12 \right) \|\Phi\|^2 \|(\Phi_N)^{-1}\|^3 \sqrt{8N|\epsilon|} (C_{f, \phi})^{l_0} \frac{\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0+1} |c(k)|^2}{\sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0} |c(k)|^2} \\
 &\leq \frac{2^5 \|\Phi\|^3 \|(\Phi_N)^{-1}\|^3}{M_f \min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|} \sqrt{8N|\epsilon|} (C_{f, \phi})^{l_0}. \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

结合假设 (3.32), 对 $1 \leq n \leq N$ 都有

$$\left| \sum_{m=1}^{N-1} c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k'L + l_0 + 1 - m) \phi(\gamma_n + m) + d_{\epsilon, k'}(k'L + l_0 + 1) \phi(\gamma_n) - \delta_{k'} f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1) \right|^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\sum_{m=1}^{N-1} |c_{\epsilon, k', l_0}^{1/2}(k'L + l_0 + 1 - m) - \delta_{k'} c(k'L + l_0 + 1 - m)|^2 + |d_{\epsilon, k'}(k'L + l_0 + 1) - \delta_{k'} c(k'L + l_0 + 1)|^2 \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{m=0}^{N-1} |\phi(\gamma_n + m)|^2 \right) \\
 &\leq \frac{2^{14} N \|\Phi\|^8 \|(\Phi_N)^{-1}\|^6}{(M_f)^2 \min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|^2} (C_{f, \phi})^{2l_0} |\epsilon|. \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

如果

$$|f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)| > \frac{2^7 \|\Phi\|^4 \|(\Phi_N)^{-1}\|^3 (C_{f, \phi})^{l_0}}{M_f \min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|} \sqrt{N|\epsilon|}, \quad \gamma_n \in \Gamma, \quad 1 \leq n \leq N, \tag{3.52}$$

则有

$$|\tilde{z}_\epsilon(k'L + l_0 + \gamma_n + 1) - \delta_{k'} f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)| \leq \sqrt{|\epsilon|} \tag{3.53}$$

成立.

如果式 (3.52) 不成立, 可得

$$\begin{aligned}
 &|\tilde{z}_\epsilon(k'L + l_0 + \gamma_n + 1) - \delta_{k'} f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)| \leq |\tilde{z}_\epsilon(k'L + l_0 + 1 + \gamma_n)| + |f(\gamma_n + k'L + l_0 + 1)| \\
 &\leq \frac{2^9 \|\Phi\|^4 \|(\Phi_N)^{-1}\|^3}{M_f \times \min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|} (C_{f, \phi})^{l_0} \sqrt{N|\epsilon|}. \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

因此不论式 (3.52) 成立与否, 由式 (3.14), (3.53) 和 (3.54), 我们即得

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=k'L+l_0+2-N}^{k'L+l_0+1} |c_{\epsilon, k', l_0+1}^{1/2}(k) - \delta_{k'} c(k)|^2 &\leq \frac{2^{18} N \|\Phi\|^8 \|(\Phi_N)^{-1}\|^8}{(M_f)^2 \min_{1 \leq n \leq N} |\phi(\gamma_n)|^2} (C_{f, \phi})^{2l_0} N |\epsilon| \\
 &\leq 8N \|(\Phi_N)^{-1}\|^2 (C_{f, \phi})^{2l_0+2} |\epsilon|. \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

所以在情形 2 时, 式 (3.31) 对 $l = l_0 + 1$ 也成立. 命题 3.3 由数学归纳法证毕.

令 MEPS 算法第三步得到的向量为 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^1 = (c_{\epsilon, k'}^1(k))_{k \in \mathbb{Z}}, k' \in \mathbb{Z}$. 类似于命题 3.4, 我们有如下命题.

命题 3.5 若 \mathbf{c}, ϵ 满足定理 3.1 的条件. 则对任意 $k' \in \mathbb{Z}$, 存在 $\delta_{k'} \in \{-1, 1\}$ 使得当 $k'L + 1 - N \leq k \leq k'L + (L - 1)/2$ 时,

$$|c_{\epsilon, k'}^1(k) - \delta_{k'} c(k)| \leq \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{|k-k'L|+N-1} \sqrt{8N|\epsilon|} \tag{3.56}$$

成立.

将 MEPS 算法中经第四步调整相位后得到的向量记作 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^2, k' \in \mathbb{Z}$. 则由文献 [17] 中命题 6.11 可得如下命题.

命题 3.6 若 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}, \delta_{k'} \in \{-1, 1\}, k' \in \mathbb{Z}$ 为命题 3.5 中定义的向量. 如果式 (3.23) 成立, 则存在整体相位 $\delta \in \{-1, 1\}$, 当 $k' \in \mathbb{Z}$ 且 $\sum_{k=2-N}^0 |c(k - k'L - (L - 1)/2)|^2 \neq 0$ 时, 就有 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^2 = \delta \delta_{k'} \mathbf{c}_{\epsilon, k'}^1$ 成立.

本节最后利用 $\mathbf{c}_{\epsilon, k'}^2, k' \in \mathbb{Z}$ 进行粘合, 并证明定理 3.1.

定理 3.1 的证明 令 $k'_+ = \lfloor \frac{K_+(f)+(L-1)/2}{L} \rfloor$ 和 $k'_- = \lfloor \frac{K_-(f)-(L-1)/2}{L} \rfloor$. 且对 $k \in \mathbb{Z}$, 定义 $k' = \lfloor \frac{2k+L-1}{2L} \rfloor$. 则当 $k \in [k'_-L - (L - 1)/2, k'_+L + (L - 1)/2]$, 由式 (3.19), (3.20), 和命题 3.5, 3.6, 可找到整体相位 $\delta \in \{-1, 1\}$ 使得

$$|c_\epsilon(k) - \delta c(k)| = |\delta \delta_{k'} c_{\epsilon, k'}^1(k) - \delta c(k)| \leq \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{N-1+(L-1)/2} \sqrt{8N|\epsilon|}. \tag{3.57}$$

而当 $k \notin [k'_-L - (L-1)/2, k'_+L + (L-1)/2]$ 时, $c(k) = 0$, 并由命题 3.5 有

$$\begin{aligned} |c_\epsilon(k) - \delta c(k)| &= |c_\epsilon(k)| = |c_{\epsilon, k'}^1(k) - \delta_{k'} c(k)| \\ &\leq \|(\Phi_N)^{-1}\| (C_{f, \phi})^{N-1+(L-1)/2} \sqrt{8N|\epsilon|}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

综合式 (3.57) 和 (3.58), 我们完成了定理 3.1 的证明.

4 数值实验

本节我们选取由四阶 B 样条 B_4 生成的实平移不变空间 $V(B_4)$ 中不可分信号作为模型, 其中 N 阶 B 样条 B_N 的定义如下

$$B_N = \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_N. \quad (4.1)$$

注意到当生成元为 B_N 时, 在 $(0, 1)$ 中任意选取 $2N - 1$ 个不同的点, 按照式 (2.2) 定义的矩阵 Φ 满足定理 2.2 中所有的条件, 参见文献 [31] – [32]. 给定奇数 $L \geq 1$, 我们选取采样集合

$$Y_L = \left(\left\{ \frac{m}{8}, 1 \leq m \leq 7 \right\} + LZ \right) \cup \left(\left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right\} + \mathbb{Z} \right), \quad (4.2)$$

其采样密度为 $4 + 3/L$.

我们考虑具有紧支集的信号 $f(t) = \sum_{k=K_-(f)}^{K_+(f)} c(k) B_4(t-k) \in V(\phi)$, 其系数

$$c(k) \in [-1, 1] \setminus [-0.1, 0.1], \quad K_-(f) \leq k \leq K_+(f) \quad (4.3)$$

是随机选取的. 在被有界噪声 ϵ 干扰的环境下, 我们得到的含噪无相样本为

$$z_\epsilon(y) = |f(y)|^2 + \epsilon(y) \|f\|_\infty \geq 0, \quad y \in Y_L, \quad (4.4)$$

其中 $\epsilon(y)$, $y \in Y_L$ 是在 $[-\epsilon, \epsilon]$ 中随机选取的. 设定阈值

$$M_0 = 0.005 \approx \frac{6S_f}{\|(\Phi_N)^{-1}\|}.$$

我们把利用无相含噪样本 (4.4), 由 MEPS 算法重构的信号记作

$$f_{\epsilon, L}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{\epsilon, L}(k) B_4(t-k), \quad (4.5)$$

并定义重构误差

$$e(\epsilon, L) := \min_{\delta \in \{-1, 1\}} \max_{k \in \mathbb{Z}} |c_{\epsilon, L}(k) - \delta c(k)|. \quad (4.6)$$

因 $B_4(t) \geq 0$ 且对任意 $t \in \mathbb{R}$ 满足 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} B_4(t-k) = 1$, 可得

$$\min_{\delta \in \{-1, 1\}} \max_{t \in \mathbb{R}} |f_{\epsilon, L}(t) - \delta f(t)| \leq e(\epsilon, L). \quad (4.7)$$

由定理 3.1 可知, 式 (4.6) 中的重构误差 $e(\epsilon, L) = O(\sqrt{\epsilon})$, (cf. 式 (3.26)), 见图 1.

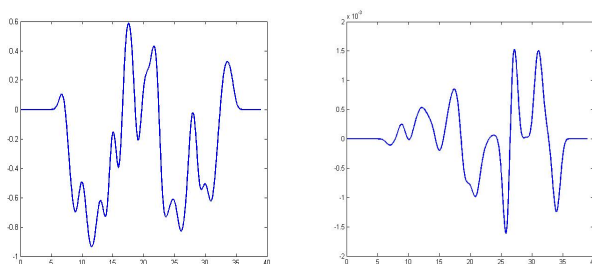


图 1 左图描绘的是四阶 B 样条不可分信号 $f(t) = \sum_{k=5}^{32} c(k)B_4(t-k)$, 其中系数 $c(k)$, $5 \leq k \leq 32$ 由式 (4.3) 确定. 右图描绘的是利用采样集合 (4.2) 上的含噪无相样本 (4.4), 在模去整体相位 ± 1 的意义下, 由 MEPS 算法重构的信号 $f_{\epsilon, L}$ 与原信号 f 之间的差, 其中噪音扰动 $\epsilon = 10^{-5}$ 和延拓长度 $L = 1$, 常数 $\|(\Phi_4)^{-1}\| \approx 1.2396 \times 10^3$. 此时重构误差 $e(\epsilon, L) = 0.0029$, 最大的采样误差 $\min_{\delta \in \{-1, 1\}} \max_{y \in Y_L} |f_{\epsilon, L}(y) - \delta f(y)| = 0.0016$.

表 1 MEPS 算法成功恢复信号的概率(单位:%)

$\epsilon \backslash L$	1	3	5	7	15	31
10^{-4}	91.5	25.4	4.4	1.7	0	0
5×10^{-5}	98.3	35.7	12.9	5.0	0	0
10^{-5}	100	69.5	45.3	31.4	10.8	0.9
5×10^{-6}	100	78.1	57.9	50.1	23.9	4.9
10^{-6}	100	92.6	80.8	74.5	53.3	25.4

由定理 3.1 中式 (3.23) 可知当延拓长度 L 或噪音扰动 ϵ 较大时, MEPS 算法可能不能很好的恢复平移不变实值不可分信号. 在本节中若重构误差

$$e(\epsilon, L) < 0.1, \tag{4.8}$$

我们认为 MEPS 算法成功恢复了信号, 此时存在整体相位 $\delta \in \{-1, 1\}$ 使得

$$\delta c_{\epsilon, L}(k)c(k) > 0, \quad K_-(f) \leq k \leq K_+(f).$$

本节的数值实验也证实了当延拓长度 L 或噪音扰动 ϵ 较大时, MEPS 算法不能很好地实现四阶 B 样条不可分信号的无相重构. 表 1 为对不同的延拓长度 L 和噪音扰动 ϵ , 经 1000 次试验后 MEPS 算法成功恢复, (见(4.8)), 由 B_4 生成的实值不可分信号的概率.

参考文献

- 1 Shechtman Y, Eldar Y, Cohen O etc. Phase retrieval with application to optical imaging: A contemporary overview. *IEEE Signal Proc Mag*, 2015, 32: 87-109
- 2 Jaganathan K, Eldar Y, Hassibi B. Phase retrieval: An overview of recent developments. In: *Optical Compressive Imaging*. CRC Press, 2016, 261-296
- 3 Fineup J R. Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform. *Opt Lett*, 1978, 3: 27-29
- 4 Millane R P. Phase retrieval in crystallography and optics. *J Opt Soc Am A*, 1990, 7: 394-411
- 5 Fineup C, Dainty J. Phase retrieval and image reconstruction for astronomy. In: *Image Recovery: Theory and Application*. Seattle: Academy Press, 1987, 231-275
- 6 Rabiner L, Juang B H. *Fundamentals of speech recognition*. New Jersey: Prentice Hall Inc, 1993
- 7 Balan R, Casazza P, Edidin D. On signal reconstruction without phase. *Appl Comput Harmon Anal*, 2006, 20: 345-356
- 8 Wang Y, Xu Z. Phase retrieval for sparse signals. *Appl Comput Harmon Anal*, 2014, 37: 531-544
- 9 Gao B, Sun Q, Wang Y etc. Phase retrieval from the magnitudes of affine linear measurements. *Adv Appl Math*, 2018, 93: 121-141
- 10 Li L, Cheng C, Han D etc. Phase retrieval from multiple-window short-time Fourier measurements. *IEEE Signal Process Lett*, 2017, 24: 372 - 376
- 11 Candes E J, Eldar Y, Strohmer T etc. Phase retrieval via matrix completion. *SIAM J Imag Sci*, 2013, 6: 199-225
- 12 Bandeira A, Cahill J, Mixon D etc. Saving phase: injectivity and stability for phase retrieval. *Appl Comput Harmon Anal*, 2014, 37: 106-125
- 13 Cahill J, Casazza P, Daubechies I. Phase retrieval in infinite-dimensional Hilbert space. *Trans Amer Math Soc Series B*, 2016, 3: 63-76
- 14 Alaifari R, Daubechies I, Grohs P etc. Reconstructing real-valued functions from unsigned coefficients with respect to wavelet and other frames. *J Fourier Anal Appl*, 2017, 23: 1480-1494
- 15 Alaifari R, Daubechies I, Grohs P etc. Stable phase retrieval in infinite dimensions. *Found Comput Math*, 2018, to appear
- 16 Alaifari R, Grohs P. Phase retrieval in the general setting of continuous frames for Banach spaces. *SIAM J Math Anal*, 2017, 49: 1895-1911
- 17 Chen Y, Cheng C, Sun Q etc. Phase retrieval of real-valued signals in a shift-invariant space. arXiv: 1603.01592
- 18 Cheng C, Jiang J, Sun Q. Phaseless sampling and reconstruction of real-valued signals in shift-invariant spaces. arXiv: 1702.06443
- 19 Sun W. Local and global phaseless sampling in real spline spaces. arXiv: 1705.00836
- 20 Bodmann B, Hammen N. Stable phase retrieval with low-redundancy frames. *Adv Comput Math*, 2015, 41: 317-331
- 21 Eldar Y, Mendelson S. Phase retrieval: stability and recovery guarantees. *Appl Comput Harmon Anal*, 2014, 36: 473-494
- 22 Balan R, Zhou D. On Lipschitz analysis and Lipschitz synthesis for the phase retrieval problem. *Linear Algebra Appl*, 2016, 496: 152-181
- 23 Balan R, Wang Y. Invertibility and robustness of phaseless reconstruction. *Appl Comput Harmon Anal*, 2015, 38: 469-488
- 24 Candès E J, Strohmer T, Voroninski V. PhaseLift: exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming. *Commun Pure Appl Math*, 2013, 66: 1241-1274
- 25 Sun Q, Tang W S. Nonlinear frames and sparse reconstructions in Banach spaces. *J Fourier Anal Appl*, 2017, 23: 1118-1152
- 26 Thakur G. Reconstruction of bandlimited functions from unsigned samples. *J Fourier Anal Appl*, 2011, 17: 720-732
- 27 Fineup J R. Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform. *Opt Lett*, 1978, 3: 27-29
- 28 Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 1972, 35: 237-246
- 29 Netrapalli P, Jain P, Sanghavi S. Phase retrieval using alternating minimization. *IEEE Trans Signal Proc*, 2015, 63: 4814-4826
- 30 Qiu T, Babu P, Palomar D P. PRIME: phase retrieval via majorization-minimization. *IEEE Trans Signal Process*, 2016, 64: 5174-5186
- 31 Goodman T N T, Micchelli C A. On refinement equations determined by Polya frequency sequences. *SIAM J Math Anal*, 1992, 23: 766-784
- 32 Goodman T N T, Sun Q. Total positivity and refinable functions with general dilation. *Appl Comput Harmon Anal*,

2004, 16: 69-89

SCIENTIA SINICA Mathematica: A phaseless reconstruction algorithm for real-valued signals in a shift-invariant space

Chen Y & Cheng C & Sun Q Y

Abstract In this paper, we consider an infinite dimensional phase retrieval problem to reconstruct real-valued signals living in a shift-invariant space from their phaseless samples taken on a discrete set with finite sampling density. In this paper, we also propose a suboptimal reconstruction algorithm when its noisy phaseless samples are available only. Finally, numerical simulations are performed to demonstrate the stable reconstruction of B-spline signals from their noisy phaseless samples.

Keywords phaseless reconstruction, shift-invariant space, sampling density

MSC(2010) 94A20, 42A99, 42C15

doi: 10.1360/012016-XXX