多进制小波分析

黄达人　毕宁　孙颀彧　著

浙江大学出版社

前　　言

小波分析有其深刻的理论意义和广泛的应用前景, 这些年来得到迅猛的发展。通常所说的小波, 是由一个函数(母小波)经过二进伸缩和整平移所产生的 $L^2(\mathbb{R})$ 空间或其他空间的一个基底, 视为经典小波。本书所讨论的小波是由 $M-1$个函数 $(M \geq 2)$ 经过 M 进伸缩与整平移所产生的某空间的基底, 这就是多进制的含义。

本书尽量反映多进制小波的最新研究成果, 但不求全。历史的陈述也不多, 那怕是作者自己的成果也有很多没有写入。在取舍定理的时候, 尽量选能揭示基本性质的那些, 而定理的证明也选用一些典型的方法, 并且尽量避免同一个方法在不同的场合使用, 以拓展读者的思路。那些证明过程过于冗长的定理没有选入, 只列了相应的参考文献。对于一些众所周知的结论就不加证明地直接陈述引用。

从数学的角度看, 多进制小波与二进制小波是有本质不同的。例如在§2.10节, 证明了$M = 2$ 时, 同时具有对称性和正交性的紧支撑细分函数只有 $[0,1)$ 上的特征函数及其整平移, 而对 $M \geq 3$的情形, 读者可以在第四章看到一些同时具有对称性和

正交性的紧支撑细分函数的实例。另外在细分函数的整平移局部线性无关和整体线性无关的等价关系方面, 在同时具有正交性和插值性的连续紧支撑细分函数的存在性方面都可以看到这些差异。

本书的编排尽量做到自身完备, 那些具备大学分析类数学基础的读者应当可以无困难地读懂全书。我们希望, 原先对小波分析不很熟悉的读者可以借助此书对多进制小波有一个基本了解。而熟悉小波分析的读者可以在本书的基础上开展此领域的研究工作。

本书的研究内容得到了国家自然科学基金、天元项目、浙江省自然科学基金、教育部博士点基金的支持, 作者在此表示深切的感谢。还要感谢张泽银、戴欣荣、李云章、王振武、刘九芬、王伟、李峰、吴绍权、胡军权、胡国生诸位博士, 他们对本书的出版贡献了力量。

由于作者水平和知识所限, 书中不妥与错误之处在所难免, 还望同行与读者批评指正。

作　者

2001．10．

目 录

第一章 预备知识 ...... (1)

1.1 Fourier 级数 ...... (1)

1.2 Fourier 变换 ...... (5)

1.3 广义函数 ...... (8)

1.4 内积空间 ...... (10)

第二章 细分函数 ...... (13)

2.1 细分分布的存在性和惟一性 ...... (14)

2.2 光滑性: 频域方法 ...... (19)

2.3 光滑性: 时域方法 ...... (28)

2.4 稳定性 ...... (37)

2.5 正交性 ...... (44)

2.6 线性无关性 ...... (52)

2.7 局部线性无关性 ...... (56)

2.8 Strang-Fix 条件 ...... (64)

2.9 级联序列的收敛性 ...... (67)

2.10 对称性 .... (74)
2.11 插值性 .... (79)
2.12 解析表达式 .... (82)

第三章 多分辨分析和小波 .... (89)
3.1 多分辨分析和尺度函数 .... (89)
3.2 尺度函数和细分函数 .... (95)
3.3 正交小波分解 .... (100)
3.4 半正交小波分解 .... (110)
3.5 双正交小波分解 .... (120)
3.6 小波分解与合成 .... (131)

第四章 多进小波的例子 .... (141)
4.1 Haar 小波 .... (141)
4.2 正交小波 .... (147)
4.3 对称和反对称正交小波 .... (159)
4.4 正交插值小波 .... (164)
4.5 样条小波 .... (168)

参考文献 .... (179)
索引 .... (190)

第一章　预备知识

为本书的完整性, 本章将分四节分别简述 Fourier 级数、Fourier 变换、广义函数和内积空间的一些基本性质。有兴趣的读者可进一步参阅 [27, 34, 56, 57, 75]。

1.1　Fourier 级数

一个定义在实轴上的函数 f 在满足$f(x+T)=f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, 时被称为一个周期函数。而常数 $T>0$ 被称为上述周期函数 f 的周期。在工程应用中, 一个实轴上的函数也被认为是时域上的信号。因此, 一个周期函数也就自然地被称为周期信号。 周期信号经常出现于工程应用中, 如图1.1.1 和图1.1.2 的周期矩形脉冲信号和周期锯齿信号。

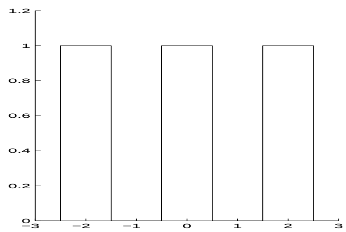


图1.1.1. 周期矩形脉冲信号

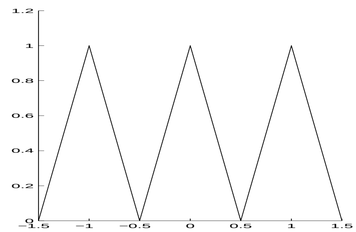


图1.1.2. 周期锯齿信号

设$1 \le p \le \infty$, 定义周期为$T > 0$的可测函数f的L^p模为

$$\|f\|_{L^p_{([0,T])}} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{|T|} \displaystyle\int_0^T |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,T]} |f(x)|, & p = \infty。 \end{cases}$$

记所有L^p模有限并且周期为T的可测函数全体为$L^p_{([0,T])}$。根据Hölder不等式,

$$\|f\|_{L^p_{([0,T])}} \le \|f\|_{L^q_{([0,T])}}, \qquad 1 \le p \le q \le \infty 。$$

因此函数空间$L^p_{([0,T])}, 1 \le p \le \infty$, 具有下面的包含关系:

$$L^\infty_{([0,T])} \subset L^q_{([0,T])} \subset L^p_{([0,T])} \subset L^1_{([0,T])}, \qquad 1 \le p \le q \le \infty 。$$

对$L^p{}_{([0,2\pi])}$中的函数$f, 1 \le p \le \infty$, 定义

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} 。 \tag{1.1.1}$$

显然$|c_n(f)| \le \|f\|_{L^p_{([0,2\pi])}}$对所有整数$n$成立。由此, 对任意的$L^p_{([0,2\pi])}$函数$f$, $\{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}}$是一个有界序列。此序列通常被称

为 f 的 Fourier 系数。而形式上的和式 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx}$ 则被称为 f 的 Fourier 级数, 并记为

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \text{。} \tag{1.1.2}$$

我们必须指出的是, 尽管对任意的 $L^p{}_{([0,2\pi])}$ 函数 f, 都有其对应的 Fourier 级数, 但决不能断定所对应的 Fourier 级数是收敛的。此外, 即使级数在某一点 x 收敛也未必收敛于 $f(x)$。

定理 1.1.1 (Riemann **引理**) **设** $1 \le p \le \infty$ **和** $f \in L^p_{([0,2\pi])}$。**那么** f **的** Fourier **系数满足** $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = 0$。

定理 1.1.2 (**惟一性定理**) **设** $1 \le p \le \infty$, f **和** g **是** $L^p_{([0,2\pi])}$ **中的二个函数。记** $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ **和** $\{c_n(g)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ **分别为其** Fourier **系数。如果** $c_n(f) = c_n(g)$ **对所有的整数** $n \in \mathbb{Z}$ **成立, 那么** $f = g$。

从上述惟一性定理知, $L^p_{([0,2\pi])}$ 中具有零 Fourier 系数的函数只有零函数。因此此定理可以用来判定二个 $L^p_{([0,2\pi])}$ 函数是否恒同。

定理 1.1.3 (Parseval **恒等式**) **设** $f \in L^2_{([0,2\pi])}$。**记** f **的** Fourier **系数为** $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$。**那么**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \text{。}$$

对 $f \in L^p_{([0,2\pi])}$, 我们用 $S_n f$ 表示其 Fourier 级数的部分和

$$(S_n f)(x) = \sum_{|k|\le n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \text{。}$$

通过计算, 我们可以把部分和$S_n f$ 表示为下述的积分形式

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\text{ 。}$$

对部分和 $S_n f$, $n \geq 1$, 作 Cesàro 平均

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_k f)(x)\text{ 。}$$

类似于部分和, $\sigma_n f$ 可有下面的积分表示公式

$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2(t/2)}\mathrm{d}t,$$

但核函数 $K_n(t) = \frac{\sin^2(n+1)t/2}{(n+1)\sin^2(t/2)}$ 是一个 n 次非负三角多项式, 它通常被称为 Fejer 核。对任意 $f \in L^p_{([0,2\pi])}$, $\sigma_n f$ 可在 $L^p_{([0,2\pi])}$ 意义下逼近 f。

定理 1.1.4 **设** $1 \leq p < \infty$ **以及** $f \in L^p_{([0,2\pi])}$, **则** $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - \sigma_n f\|_{L^p_{([0,2\pi])}} = 0$。

对任意的 2π 周期函数 $f \in L^p_{([0,2\pi])}, 1 \leq p < \infty$。由于$\sigma_n f, n \geq 0$, 是三角多项式。因此, 从定理1.1.4 我们得到了三角多项式在 $L^p_{([0,2\pi])}$ 中是稠密的结论。

定理 1.1.5 **设**$1 \leq p < \infty$。**那么三角多项式全体所组成的空间在** $L^p_{([0,2\pi])}$ **中是稠密的。**

1.2 Fourier 变换

对实轴上的可测函数 $f(x)$, 定义它的 $L^p(\mathbb{R})$ 模, $1 \leq p \leq \infty$, 为

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty\text{。} \end{cases}$$

记所有具有有限 $L^p(\mathbb{R})$ 模的可测函数全体为 $L^p(\mathbb{R})$。我们通常称 $L^p(\mathbb{R})$ 中的函数为 p 可积函数。当 $p=1$ 时, $L^1(\mathbb{R})$ 中的函数也简称为可积函数。

对一个可积函数 f,我们定义它的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \mathrm{d}x\text{。}$$

有时, 我们也记 f 的 Fourier 变换为 $\mathcal{F}(f)$。Fourier 变换无论在理论上还是在应用中都是十分有用的工具。事实上, Fourier 变换将时域上的信号分布转化为了频域上的信号分布, 而且原信号仍可从频域上的信号分布得到恢复。

从可积函数 f 的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 的定义, 我们看到 $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$。

定理 1.2.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$。那么 f 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\xi)$ 是一个有界连续函数，并且

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \text{和} \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0\text{。}$$

定义平移算子 $\tau_h, h \in \mathbb{R}$, 和伸缩算子 $\delta_a, a > 0$, 分别为

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h) \quad \text{和} \quad (\delta_a f)(x) = f(ax), \qquad x \in \mathbb{R}\text{。}$$

对可积函数的 Fourier 变换 $\mathcal{F}(f)$, 我们容易验证下面定理1.2.2中所述的性质。

定理 1.2.2 设 f, g 为可积函数, 则

(i)(线性性) $\mathcal{F}(\alpha f+\beta g)(\xi)=\alpha\mathcal{F}(f)(\xi)+\beta\mathcal{F}(g)(\xi), \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$;

(ii)(平移性) $\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi)=e^{-ih\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$ 和 $\mathcal{F}(e^{-ih\cdot}f)(\xi)=\tau_h\mathcal{F}(f)(\xi)$;

(iii)(伸缩性) $\mathcal{F}(\delta_a f)(\xi)=a^{-1}(\mathcal{F}f)(a^{-1}\xi)$;

(iv)(导数性质) 如果进一步假设 $xf(x)\in L^1(\mathbb{R})$, 那么 $\mathcal{F}(f)$ 可导, 且 $\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)=\mathcal{F}(-i\cdot f(\cdot))(\xi)$;

(v)如果同时假设 f 和 f 的导数 f' 可积, 并且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$, 那么 $\mathcal{F}(f')(\xi)=i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$。

定义 $L^1(\mathbb{R})$ 函数 f 和 $L^p(\mathbb{R})$ 函数 g 的卷积 $f*g$ 为

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\ 。$$

不难验证

$$\|f*g\|_p\le\|f\|_1\|g\|_p, \qquad 1\le p\le\infty,$$

以及

$$\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g), \qquad \forall\, f,g\in L^1(\mathbb{R})\ 。$$

对 Fourier 变换, 我们有下面的 Parseval 恒等式, 即

定理 1.2.3 设 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$。那么

$$\|f\|_2=(2\pi)^{-1/2}\|\widehat{f}\|_2\ 。$$

根据 Parseval 恒等式, 我们可以用下列方法定义 $L^2(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 变换: 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 任取序列 $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), n \geq 1$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$。例如取 $f_n = f\chi_{[-n,n]}$, 这里 $\chi_{[-n,n]}$ 表示 $[-n,n]$ 上的特征函数。由 Parseval 恒等式,

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = (2\pi)^{1/2}\|f_n - f_m\|_2\,, \qquad \forall\, n, m \geq 1\ 。$$

从而 $\widehat{f}_n, n \geq 1$, 是一个 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Cauchy 序列, 由此序列 $\widehat{f}_n$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 有极限。我们定义此极限就为 $L^2(\mathbb{R})$ 函数 f 的 Fourier 变换。对在此意义下的 $L^2(\mathbb{R})$ 函数的 Fourier 变换, 我们有

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2\,, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})\ 。$$

定义可积函数 f 的 Fourier 逆变换 $f^\vee$ 为

$$f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi\ 。$$

有时, 我们也用 $\mathcal{F}^{-1}f$ 来表示 f 的 Fourier 逆变换。

定理 1.2.4 **设** $f, \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$。**那么**

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f)\ 。$$

特别对非负 Fourier 变换 $\mathcal{F}f$, 我们有下面的结论。

定理 1.2.5 **设** $f \in L^1(\mathbb{R})$, f **在** 0 **点连续和** $\mathcal{F}f \geq 0$。**那么** $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ **且** $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)$。

Fourier 变换和 Fourier 级数是密切相关的。下面的 Poisson 求和公式 就是一个很好的例证。

定理 1.2.6 设 $f(x)\in L^1(\mathbb{R})$。假设 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)$ 处处收敛于某个连续函数且 $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 处处收敛，那么

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}\text{。}$$

经适当的伸缩变型, 定义中的 Poission 求和公式也可以由下面稍微不同的形式来表述:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2ak\pi) = (2a\pi)^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(a^{-1}k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a^{-1}kx},$$

和

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2k\pi)\mathrm{e}^{2k\mathrm{i}\pi x}\text{。}$$

1.3 广义函数

记所有实轴上具有紧支撑的 C^∞ 函数全体为 $C_c^\infty(\mathbb{R})$, 所有支撑于紧集 K 的 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 函数全体为 $C_c^\infty(K)$。一个广义函数 g 是 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上的连续线性形式 $g:\, C_c^\infty(\mathbb{R})\longmapsto\mathbb{R}$, 它满足下面的线性性和连续性条件:

(i) $g(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 g(f_1)+\alpha_2 g(f_2)$, 对所有 $f_1, f_2\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 和 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ 成立;

(ii) 对任一紧集 K, 存在自然数 N 和正数 C, 使得下式成立

$$|g(f)|\le C\sup_{|k|\le N}\|f^{(k)}\|_\infty, \qquad \forall f\in C_c^\infty(K),$$

在此 $f^{(k)}$ 表示 f 的 k 次导数。

定义 Schwartz 函数类 $\mathcal{S}$ 为

$$\mathcal{S}=\left\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R}):\quad \|f^{(k)}(x)(1+|x|)^{l}\|_{\infty}<\infty,\quad \forall\, k,l\geq 0\right\}\ 。$$

从 Schwartz 函数的定义可以看出 $C_c^{\infty}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}$。Schwartz 函数类的一个重要的性质就是 Schwartz 函数的 Fourier 变换仍是 Schwartz 函数。

一个缓增分布 g 是 Schwartz 函数类 $\mathcal{S}$ 上的连续线性形式 g : $\mathcal{S}\longmapsto\mathbb{R}$, 它满足下列两个条件:

(i) $g(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 g(f_1)+\alpha_2 g(f_2),\quad$ 对所有 $f_1,f_2\in\mathcal{S}$ 和 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ 成立;

(ii)存在正整数 N_1,N_2 和正数 C, 使得

$$|g(f)|\leq C\sup_{|k|\leq N_1}\|f^{(k)}(x)(1+|x|)^{N_2}\|_{\infty},\qquad \forall f\in\mathcal{S}\ 。$$

在本书中, 我们也简称缓增分布为分布。显然缓增分布是一个广义函数。下面是一些缓增分布的典型例子:

(i) δ 分布, 它与 $f\in\mathcal{S}$ 的作用为 $\delta(f)=f(0)$;

(ii) $L^p(\mathbb{R})$ 函数 $g, 1\leq p\leq\infty$, 它与 $f\in\mathcal{S}$ 的作用定义为 $g(f)=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)\mathrm{d}x$;

(iii) 多项式控制的可测函数 g, 即存在多项式 $P(x)$ 使得 $|g(x)|\leq|P(x)|$, 此时我们定义 $g(f)=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)\mathrm{d}x$。

由于 Schwartz 函数的 Fourier 变换仍是 Schwartz 函数, 我们可以通过下面方式来定义缓增分布 g 的 Fourier 变换 $\widehat{g}$:

$$\widehat{g}(f)=g(\widehat{f}),\qquad f\in\mathcal{S}\ 。$$

可以验证，上述方式定义的缓增分布 g 的 Fourier 变换 $\widehat{g}$，在 g 是 $L^1(\mathbb{R})$ 函数或 $L^2(\mathbb{R})$ 函数时，与我们以前定义的 Fourier 变换相同。对于 δ 分布，它的 Fourier 变换就是常值函数 1。

我们将利用 Fourier 变换考虑缓增分布的收敛性。

定理 1.3.1 设 $g_n, n \geq 1$，是一列广义函数，且它们的 Fourier 变换 $\widehat{g}_n$ 是可测函数并受某一多项式控制，即存在多项式 $P(\xi)$ 使得 $|\widehat{g}_n(\xi)| \leq P(\xi)$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 成立。如果 $\widehat{g}_n, n \geq 1$，在任一紧集上一致收敛，那么 g_n，$n \geq 1$，在分布意义下收敛于某个缓增分布。

1.4 内积空间

一个实线性空间 X 上的内积，指的是一个二元数值函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$，它满足下列条件：

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in X$;

(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall\, x, y \in X$;

(iii) $\langle x, x\rangle > 0, \quad \forall\, 0 \neq x \in X$。

一个带有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的实线性空间 X，通常被称为内积空间，并记为 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$。对实内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的任一 x，定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$。不难验证 $\|\cdot\|$ 是一个范数。从而，我们可以由范数引入实内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的拓扑。在上述范数所引入的拓扑意义下，$(X, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ 是一个完备的拓扑空间时，我们称此实内积空间为实 Hilbert 空间。类似地，我们可以定义复内积空间和复 Hilbert 空间。但此时条件 (i) 中的常数 α, β 为复数，而条件 (ii) 改为：$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ 对所有的 $x, y \in X$ 成立。

典型的 Hilbert 空间例子有:

(i) Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 在下列内积 $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 意义下, 成为一个 Hilbert 空间, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$;

(ii) 线性空间 $L^2(\mathbb{R})$ 在下列内积 $\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 意义下成为 Hilbert 空间, 其中 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$;

(iii) 线性空间 $L^2_{([0,T])}$ 在下列内积 $\langle f,g\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 意义下成为 Hilbert 空间, 其中 $f,g\in L^2_{([0,T])}$。

设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间。当 X 的两个元素 x,y 满足其内积 $\langle x,y\rangle$ 为零时, 我们称它们是互相正交的, 并记为 $x\perp y$。同样, 对 X 的两个子集 A 和 B, 如果对所有 $x\in A$ 和 $y\in B$ 成立 $x\perp y$, 则称 A 与 B 正交, 并记 $A\perp B$。一个 X 的子集 M 的正交补 $M^\perp$, 是指 X 中所有与 M 正交的元素的全体, 即

$$M^\perp=\{y\in X:\quad \langle x,y\rangle=0,\quad \forall x\in M\}\ 。$$

对 Hilbert 空间, 我们有下面的正交分解定理。

定理 1.4.1 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间。那么 H 可分解为 M 与 $M^\perp$ 的直和, 即 H 中的任一元素 f 可惟一地写成 M 中的元素 f_0 与 $M^\perp$ 中的元素 g_0 的和。此时, 我们也记 $H=M\oplus M^\perp$。

定理 1.4.2 设 M 是 Hilbert 空间 H 的线性闭子空间。对任一 $f\in H$, 定义在 M 中使得 $f-g\in M^\perp$ 的元素 g 为 f 在 M 上的投影, 并记为 Pf。那么 P 是一个有界线性算子, $P^2=P$, $\quad M=\{Pf\in H:\quad f\in H\}$, 和 $M^\perp=\{f\in H:\quad Pf=0\}$。

第二章　细分函数

设 M 是一个大于或等于 2 的正整数。当一个缓增分布 f 满足下列方程

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) f(M \cdot -n) \tag{2.0.1}$$

时称之为细分分布(refinable distribution)。方程 (2.0.1) 被称之为细分方程。在本书中, 我们总假定细分方程 (2.0.1) 中的实系数序列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是可和的, 即 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c(n)| < \infty$。相应于细分方程 (2.0.1) 的连续 2π 周期函数

$$H(\xi) = \frac{1}{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$$

被称之为细分分布 f 的符号。本章将介绍细分函数的一些基本性质。这些性质主要通过 $H(\xi)$ 的特点来描述。§2.1 节讨论了细分方程 (2.0.1) 的细分分布解的存在性和惟一性; §2.2 和 §2.3 节依据 $H(\xi)$ 的分解形式, 分别用频域和时域的方法讨论了细分函数的光滑性; §2.5 节用稳定整平移和 CQF 条件给出细分函数的整平移为正交的特征; §2.6 和 §2.7 节用 $H(\xi)$ 根的特性来

刻画细分函数 f 的整平移为线性无关的充分必要条件, 并说明当 $M=2$ 时, f 的整平移局部线性无关性和整体线性无关性等价—- 而此等价性在 $M>2$ 时是不成立的; §2.8 节用 $H(\xi)$ 的分解形式刻画细分分布满足 Strang–Fix 条件的特性; §2.9 节讨论由细分算子来定义 L_*^p 中函数所生成的级联序列的 L_*^p 收敛性问题; §2.10 节给出了紧支撑细分函数为对称或反对称的特征刻画, 进而证明当 $M=2$ 时, 紧支撑细分函数为既对称又正交的只有 $[0,1)$ 上的特征函数及其整平移这个特例; §2.11 节刻画了紧支撑连续细分函数具有插值性的特征, 并说明当 $M=2$ 时不存在连续紧支撑细分函数同时具有正交性和插值性; §2.12 节则给出了紧支撑可测细分函数为局部多项式的一个充分条件。

2.1 细分分布的存在性和惟一性

本节将讨论细分方程缓增分布解的存在性和惟一性。

定理 2.1.1 设 $\{c(n)\}$ 是有限长序列且满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)=M$。那么细分方程

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) f(M\cdot-n) \tag{2.1.1}$$

存在紧支撑缓增分布解 f。并且当 $\widehat{f}(0)=1$ 时, 紧支撑缓增分布解惟一。

为证明定理2.1.1, 我们需要一个关于无穷乘积的估计以及经典的 Paley-Wiener 定理。

引理 2.1.1 设 $H(\xi)$ 是一个 2π 周期函数, $H(0)=1$ 且存在正数 $C_0>0$ 和 $\lambda\in(0,1)$,使得

$$|H(\xi)-H(0)|<C_0|\xi|^\lambda, \qquad \forall\xi\in[-\pi,\pi]\text{。} \tag{2.1.2}$$

记 $B=\sup_{\xi\in[-\pi,\pi]}|H(\xi)|$, 那么 $\prod_{k=1}^n H(M^{-k}\xi)$, $n\geq 1$, 在任意紧集上一致收敛, 且存在与 n,ξ 无关的常数 C, 使得

$$\left|\prod_{k=1}^n H(M^{-k}\xi)\right|\leq C\left(1+|\xi|\right)^{\ln B/\ln M}\text{。} \tag{2.1.3}$$

证明: 任给一个紧集 Ω。我们知道每一个紧集是有界集, 因此存在一个正常数 C_1, 使得 $|\xi|\leq C_1$ 对所有 $\xi\in\Omega$ 成立。由 (2.1.2) 我们可得到下面的估计

$$\left|H(M^{-k}\xi)-1\right|\leq C_0C_1^\lambda M^{-k\lambda}, \qquad \forall\xi\in\Omega, \quad k\geq 1\text{。}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty\left|H(M^{-k}\xi)-1\right| &\leq \sum_{k=1}^\infty C_0C_1^\lambda M^{-k\lambda}\\ &= C_0C_1^\lambda(M^\lambda-1)^{-1}<\infty, \qquad \forall\xi\in\Omega\text{。}\end{aligned}$$

这证明了序列 $\prod\limits_{k=1}^n H(M^{-k}\xi), n\geq 1$, 在紧集 Ω 上的一致收敛性。

现在我们开始证明 (2.1.3)。对 $|\xi|\leq 1$,

$$\sum_{k=1}^n\left|H(M^{-k}\xi)-1\right|\leq\sum_{k=1}^n C_0M^{-k\lambda}\leq C_0(M^\lambda-1)^{-1}\text{。}$$

从而对所有 $|\xi|\leq 1$,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^n H(M^{-k}\xi)\right| &\leq \exp\left(\sum_{k=1}^n|H(M^{-k}\xi)-1|\right)\\ &\leq \exp\left(C_0(M^\lambda-1)^{-1}\right)<\infty\text{。}\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

对 $|\xi| \geq 1$, 记 j_0 为大于 $\ln|\xi|/\ln M$ 的最小正整数。则当 $n \leq j_0$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi)\right| &\leq B^n \leq B^{j_0} \leq B^{\frac{\ln|\xi|}{\ln M}+1} \\ &\leq B(1+|\xi|)^{\ln B/\ln M}; \qquad (2.1.5)\end{aligned}$$

而当 $n > j_0$ 时, 由 (2.1.4) 和 (2.1.5), 我们得到

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi)\right| &\leq \prod_{k=1}^{j_0}\left|H(M^{-k}\xi)\right| \times \prod_{k=1}^{n-j_0}\left|H(M^{-k}(M^{-j_0}\xi))\right| \\ &\leq B(1+|\xi|)^{\ln B/\ln M}\exp(C_0(M^{\lambda}-1)^{-1})。\end{aligned} \qquad (2.1.6)$$

综合 (2.1.4), (2.1.5) 和 (2.1.6) 就得到 (2.1.3)。 □

引理 2.1.2 (Paley-Wiener 定理 [27]) 一个缓增分布 f 具有紧支撑的充分必要条件是: 它的 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 可扩张为复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个解析函数 F, 且存在与复数 z 无关的常数 C, N, L, 使得

$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^N \mathrm{e}^{L|\mathrm{Im}z|}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}。$$

定理2.1.1的证明: 记 $H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。取正整数 L, 使得 $c(n) = 0$ 对所有的 $|n| > L$ 成立。由定理2.1.1 的假设条件知 $H(0) = 1$, 因此

$$\begin{aligned}|H(\xi)-1| &= \frac{1}{M}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}-1)\right| \\ &\leq \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c(n)|\mathrm{e}^{|n||\mathrm{Im}\xi|}|n||\xi| \\ &\leq C_0\mathrm{e}^{L|\mathrm{Im}\xi|}|\xi|, \qquad (2.1.7)\end{aligned}$$

其中 $C_0 = \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c(n)||n|$。由引理2.1.1, $\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi), n \geq 1$, 在 $\mathbb{R}$ 中的任一紧集上一致收敛, 记它的极限为 $F(\xi)$。同时, 注意到

$$\prod_{k=1}^{n+1} H(M^{-k}\xi) = H(M^{-1}\xi)\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}(M^{-1}\xi)),$$

因此 $\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi)$ 的极限函数 $F(\xi)$ 满足

$$F(\xi) = H(M^{-1}\xi)F(M^{-1}\xi)\text{。} \tag{2.1.8}$$

根据引理2.1.1 可知, $F(\xi)$ 是一个缓增分布。记 F 的 Fourier 逆变换为 f。那么, 在 (2.1.8) 两边取 Fourier 逆变换后, 我们知道此分布 f 满足细分方程 (2.1.1)。

现在证明 f 具有紧支撑。由 Paley-Wiener 定理, 我们只需证明 F 可扩张为复平面上的解析函数 F^*, 且存在常数 C, N, L, 使得

$$|F^*(z)| \leq C(1+|z|)^N \mathrm{e}^{L|\mathrm{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}\text{。} \tag{2.1.9}$$

定义$F(\xi)$在复平面的扩张为$F^*(z) = \prod_{k=1}^{\infty} H(M^{-k}z)$。由 (2.1.7) 知 $\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}z), n \geq 1$, 在复平面的任一紧集上一致收敛于 $F^*(z)$。显然 $\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}z), n \geq 1$, 是复平面上的解析函数族, 从而 $F^*(z)$ 是一个解析函数。类似于引理2.1.1 的证明, 若用 (2.1.7) 代替 (2.1.3), 我们可以得到类似于 (2.1.3) 的估计 (2.1.9)。最后我们证明满足细分方程 (2.1.1) 以及 $\widehat{f}(0) = 1$ 的紧支撑分布解 f 是惟一的。设紧支撑分布 f_1 和 f_2 是细分方程 (2.1.1) 满足 $\widehat{f_1}(0) = \widehat{f_2}(0) = 1$ 的解。记 $g = f_1 - f_2$, 那么 g 仍是紧支撑的分布, 并满足细分方程 (2.1.1)。在细分方程 (2.1.1) 两边

取 Fourier 变换, 我们得到

$$\widehat{g}(\xi) = H(\xi/M)\widehat{g}(\xi/M)\text{。} \tag{2.1.10}$$

重复应用 (2.1.10) 可得

$$\widehat{g}(\xi)=H(M^{-1}\xi)\cdots H(M^{-n}\xi)\widehat{g}(M^{-n}\xi)=\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi)\widehat{g}(M^{-n}\xi)\text{。} \tag{2.1.11}$$

因此, 由引理2.1.1和 $\widehat{g}$ 的连续性知

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi) \times \lim_{n\to\infty}\widehat{g}(M^{-n}\xi) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} H(M^{-k}\xi)\widehat{g}(0) = 0\text{。}\end{aligned}$$

这就证明了 $f_1 = f_2$, 即满足细分方程 (2.1.1) 以及 $\widehat{f}(0) = 1$ 的紧支撑分布解 f 是惟一的。 □

当细分方程 (2.1.1) 中的实系数序列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是无限长的序列, 但在无穷远处拥有一定衰减条件时, 我们仍可得到类似于定理2.1.1 的结论。

定理 2.1.2 设序列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c(n)|(1+|n|)^{\delta} < \infty$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n) = M$ ，其中 δ 是一个固定正数。那么细分方程

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)f(M\cdot -n)$$

存在惟一满足 $\widehat{f}$ 连续且 $\widehat{f}(0) = 1$的缓增分布解 f。并且, 其 Fourier 变换有下面的公式表示

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} H(M^{-k}\xi)\text{。}$$

读者可比较定理2.1.1的证明而轻易地证明定理2.1.2, 我们在此就不给出证明了。由于 $L^1(\mathbb{R})$ 函数的Fourier变换是连续的,因此从定理2.1.2知, 当细分方程 (2.1.1) 存在$L^1(\mathbb{R})$ 解时, 有惟一的可积解。

2.2 光滑性：频域方法

设 f 是一缓增分布, 且它的Fourier变换 $\widehat{f}$ 为可测函数, 定义它的Fourier指数 $s_p(f)$ 为

$$s_p(f) = \sup\left\{\gamma : \widehat{f}(\xi)(1+|\xi|)^\gamma \in L^p(\mathbb{R})\right\} 。\tag{2.2.1}$$

当 $p = 2$ 时, $s_p(f)$ 就是通常的Sobolev指数, 即属于Sobolev空间 H^γ 的指标 γ 的上界。所以, 我们有时也称 $s_p(f)$ 为Sobolev指数。从Fourier指数的定义知

$$s_p(f) + \frac{1}{p} \geq s_q(f) + \frac{1}{q}, \qquad 0 < p \leq q \leq \infty 。$$

如果 $\{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{P-1}\} \subset (0, 2\pi)$ 满足: $\xi_j = M\xi_{j-1} \bmod 2\pi, j{=}1, 2, \cdots, P{-}1$, 以及 $M\xi_{P-1} = \xi_0 \bmod 2\pi$, 我们就称$\{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{P-1}\}$ 是映射 $\tau : \xi \to M\xi \bmod 2\pi$ 的非平凡不变圈。对符号 $H(\xi)$ 有 $\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^N \mathcal{L}(\xi)$ 形式的细分分布 f, 我们可以用 $H(\xi)$ 在非平凡不变圈的值来估计 f 的Fourier 指数的上界。

定理 2.2.1 **设缓增分布 f 满足细分方程**

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) f(M\cdot - n) \tag{2.2.2}$$

且符号 $H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\mathrm{e}^{-in\xi}$ 具有下列分解形式

$$H(\xi) = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^N \mathcal{L}(\xi), \tag{2.2.3}$$

其中 $N \geq 1$, $\mathcal{L}$ 为一个 2π 的周期连续函数。又设 $\{\xi_0, \cdots, \xi_{P-1}\} \subset [-\pi, \pi]$ 为映射 $\tau : \xi \to M\xi \mod 2\pi$ 的非平凡不变圈。记 $\widetilde{\mathcal{K}} = \sum_{m=0}^{P-1} \ln|\mathcal{L}(\xi_m)|/(P\ln M)$。如果 $\widehat{f}$ 连续且 $\widehat{f}(\xi_0) \neq 0$, 那么

$$s_p(f) \leq N - \widetilde{\mathcal{K}}, \qquad 0 < p \leq \infty。 \tag{2.2.4}$$

证明：在细分方程 (2.2.2) 两边取 Fourier 变换后可得

$$\widehat{f}(\xi) = H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)。 \tag{2.2.5}$$

利用 (2.2.5) 式进行多次迭代, 我们得到下面的恒等式

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} H(M^{-k}\xi)\widehat{f}(M^{-n}\xi)。 \tag{2.2.6}$$

不妨假定 $\mathcal{L}(\xi_m) \neq 0$ 对所有 $0 \leq m \leq P-1$ 成立, 否则估计式 (2.2.4) 自然成立。由 $\mathcal{L}(\xi)$ 和 $\widehat{f}(\xi)$ 的连续性知, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0,1)$ 使得下式成立,

$$|\mathcal{L}(\xi_m+\xi)| \geq (1-\epsilon)|\mathcal{L}(\xi_m)|, \forall\, \xi \in [-\delta, \delta] \text{ 和 } m = 0, 1, \cdots, P-1, \tag{2.2.7}$$

以及

$$|\widehat{f}(\xi_0+\xi)| \geq (1-\epsilon)|\widehat{f}(\xi_0)| > 0, \qquad \forall\, \xi \in [-\delta, \delta]。 \tag{2.2.8}$$

对任意 $j \geq 1$, 设 j' 为惟一介于 0 和 $P-1$, 且 $j-j'$ 整除 P 的整数。那么通过归纳容易验证

$$M^j \xi_0 = \xi_{j'} \bmod 2\pi \text{ 。} \tag{2.2.9}$$

综合 (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) 和 (2.2.9), 立刻有下面的估计,

$$\begin{aligned}
&|\widehat{f}(M^{Pk}\xi_0+\xi)| \\
= \;& \prod_{j=1}^{Pk} |H(M^{Pk-j}\xi_0 + M^{-j}\xi)||\widehat{f}(\xi_0 + M^{-Pk}\xi)| \\
= \;& \left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M(\xi_0+\xi)}}{M^{Pk}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_0+M^{-Pk}\xi)})}\right|^N \\
& \times \prod_{j=1}^{Pk} |\mathcal{L}(M^{Pk-j}\xi_0 + M^{-j}\xi)| \times (1-\epsilon)|\widehat{f}(\xi_0)| \\
\geq \;& C(1-\epsilon)^{Pk} M^{-PkN} \left(\prod_{m=0}^{P-1} |\mathcal{L}(\xi_m)|\right)^k, \quad \forall \xi \in [-\delta, \delta],
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

其中 C 是一个与 k, ξ 无关的正常数。

由 (2.2.10) 和 $s_\infty(f)$ 的定义我们得到

$$s_\infty(f) \leq N - \widetilde{\mathcal{K}} - \ln(1-\epsilon)/P \text{ 。} \tag{2.2.11}$$

对 $0 < p < \infty$, 由 (2.2.10) 我们得到下面的估计:

$$\int_{M^{P(k-1)}|\xi_0|+1}^{M^{Pk}|\xi_0|+1} |\widehat{f}(\xi)|^p \mathrm{d}\xi$$

$$\geq \quad C\int_{-\delta}^{\delta}|\widehat{f}(M^{Pk}\xi_0+\xi)|^p\mathrm{d}\xi$$

$$\geq \quad CM^{-pPkN}(1-\epsilon)^{Pkp}\left(\prod_{m=0}^{P-1}|\mathcal{L}(\xi_m)|\right)^{kp}\delta\ 。$$

因此

$$s_p(f)\leq N-\widetilde{\mathcal{K}}-\ln(1-\epsilon)/P\ 。\tag{2.2.12}$$

综合利用 (2.2.11), (2.2.12) 以及利用 $\epsilon>0$ 的任意性, 我们就能得到 f 的 Fourier 指数 $s_p(f)$ 的估计 (2.2.4)。 □

设 $D_m, 1\leq m\leq Q$, 为 $[-\pi,\pi]$ 的一族子集。当 $D_m\bigcap D_{m'}=\emptyset, 1\leq m\neq m'\leq Q$, 和 $[-\pi,\pi]=\bigcup_{m=1}^{Q}D_m$ 时, 我们称 $D_m, 1\leq m\leq Q$, 为 $[-\pi,\pi]$ 的一个划分。对于符号 $H(\xi)$ 具有 $\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^N\mathcal{L}(\xi)$ 形式的情形, 利用 $[-\pi,\pi]$ 上的某个划分, 我们可以得到如下细分函数 f 的 Fourier 指数的下界估计:

定理 2.2.2 设缓增分布 f 具有局部有界可测的 Fourier 变换 $\widehat{f}$, 且满足细分方程

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)f(M\cdot-n)\ 。\tag{2.2.13}$$

又设符号 $H(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$ 可以分解为下列形式

$$H(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^N\mathcal{L}(\xi),\tag{2.2.14}$$

其中 N 为自然数和 $\mathcal{L}(\xi)$ 为 2π 周期的连续函数。假设 $D_m, 1\leq m\leq Q$,为 $[-\pi,\pi]$ 的一个划分, D_0 是 $[-\pi,\pi]$ 的一个子集。进一

步假设函数 $\mathcal{L}(\xi)$ 满足下列两个条件

$$\begin{cases} |\mathcal{L}(\xi)| \leq q\,, & \xi \in D_1\,, \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(M\xi)| \leq q^2\,, & \xi \in D_2\,, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ |\mathcal{L}(\xi)\cdots\mathcal{L}(M^{Q-1}\xi)| \leq q^Q\,, & \xi \in D_Q\,; \end{cases} \tag{2.2.15}$$

和

$$\begin{cases} |\mathcal{L}(\xi)| \leq rq\,, & \xi \in \mathcal{D}_1\,, \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(M\xi)| \leq (rq)^2\,, & \xi \in \mathcal{D}_2\,, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ |\mathcal{L}(\xi)\cdots\mathcal{L}(M^{Q-1}\xi)| \leq (rq)^Q\,, & \xi \in \mathcal{D}_Q\,; \end{cases} \tag{2.2.16}$$

其中 $0 < r \leq 1$, $q > 0$ 以及

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \quad = \quad \Big\{ & \ \xi \in D_m : M^j\xi \in D_0 + 2\pi\mathbb{Z} \\ & \qquad\qquad \text{对某个 } 0 \leq j \leq m-1 \text{ 成立} \Big\}\ ,\ 1 \leq m \leq Q\text{。} \end{aligned}$$

那么

$$s_\infty(f) \geq N - \frac{\ln q}{\ln M}\,, \tag{2.2.17}$$

并对任意的 $R \geq 1$ 以及 $0 < p < \infty$ 有

$$s_p(f) \geq N - \frac{\ln q}{\ln M} - \frac{\ln \sum_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)}}{Rp\ln M}, \tag{2.2.18}$$

在此, $\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)$ 表示集合

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R) = \Big\{ & 0 \leq j \leq R-1 : \\ & 2\pi M^j \left(\textstyle\sum_{i=1}^R \epsilon_i M^{-i} + [0, M^{-R}]\right) \subset D_0 + 2\pi\mathbb{Z} \Big\} \end{aligned}$$

中元素的个数。

对 $\xi \in \mathbb{R}$, 定义

$$I_k(\xi) = \left\{ j : 0 \le j \le k-1, M^j\xi \in D_0 + 2\pi\mathbb{Z} \right\},$$

并记 $I_k(\xi)$ 中元素的个数为 $i_k(\xi)$。为证明定理2.2.2, 我们需要下面关于 $\prod_{j=0}^{k-1} |\mathcal{L}(M^{-j}\xi)|$ 的点态估计。

引理 2.2.1 **设** $\mathcal{L}$ **为定理**2.2.2 **中出现的** 2π **周期函数。那么存在与** k **无关的常数** C, **使得**

$$\prod_{j=0}^{k-1} |\mathcal{L}(M^{-j}\xi)| \le Cr^{i_k(\xi)}q^k, \quad k \ge 1 \text{。} \tag{2.2.19}$$

证明： 我们对 k 作归纳来证明 (2.2.19)。取适当的常数 C, 使得 (2.2.19) 对所有 $k \le Q$ 成立。归纳假定 (2.2.19) 对所有 $k \le k_0$ 成立。

对 $\xi \in \mathcal{D}_m$ 我们有下列估计式

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{k_0} |\mathcal{L}(M^j\xi)| &= \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}(M^j\xi)| \times \prod_{j=0}^{k_0-m} |\mathcal{L}(M^j(M^m\xi))| \\ &\le (qr)^m \times (Cr^{i_{k_0+1-m}(M^m\xi)}q^{k_0+1-m}) \\ &\le Cr^{i_{k_0+1}(\xi)}q^{k_0+1} \text{。} \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

在上述推导过程中, 我们利用了有关 $\mathcal{L}$ 的估计 (2.2.15) 和 (2.2.16), 归纳假设, 以及下面的关于 $i_{k_0+1}(\xi), \xi \in \mathcal{D}_m$ 的不等式 $i_{k_0+1}(\xi) \le i_{k_0+1-m}(M^m\xi)$。

对 $\xi \in D_m \setminus \mathcal{D}_m$, $i_{k_0+1}(\xi) = i_{k_0+1-m}(M^m\xi)$。再次利用归纳

假设以及有关 $\mathcal{L}$ 的估计式 (2.2.15) 和 (2.2.16), 我们得到

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{k_0}|\mathcal{L}(M^j\xi)| &= \prod_{j=0}^{m-1}|\mathcal{L}(M^j\xi)|\times\prod_{j=0}^{k_0-m}|\mathcal{L}(M^j(M^m\xi))| \\ &\le q^m\times(Cr^{i_{k_0+1-m}(M^m\xi)}q^{k_0+1-m}) \\ &= Cr^{i_{k_0+1}(\xi)}q^{k_0+1}\text{。}\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

综合 (2.2.20) 和 (2.2.21), 并注意到 $D_m, 1\le m\le Q$, 是 $[-\pi,\pi]$ 的一个划分, 我们就归纳地证明了点态估计 (2.2.19)。 $\square$

定理2.2.2 的证明： 对细分方程 (2.2.13) 两边取 Fourier 变换后, 不难得到 $\widehat{f}(\xi)=H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)$。反复使用上式后即得

$$\widehat{f}(\xi)=\prod_{j=1}^{k}H(M^{-j}\xi)\widehat{f}(M^{-k}\xi)\text{。}\tag{2.2.22}$$

我们先考虑 $|\xi|\ge 2\pi$。取自然数 k, 使得 $2M^{k-1}\pi\le|\xi|\le 2M^k\pi$。由 (2.2.22), (2.2.14) 和引理2.2.1

$$|\widehat{f}(\xi)|\le C|\xi|^{-N}\prod_{j=0}^{k-1}|\mathcal{L}(M^{-k+j}\xi)|\le|\xi|^{-N}q^k r^{i_k(M^{-k}\xi)}\text{。}\tag{2.2.23}$$

从而

$$s_\infty(f)\ge N-\frac{\ln q}{\ln M}\text{。}$$

对任意 $R\ge 1$, 不难验证

$$i_{kR}\left(2\pi\left(\sum_{j=1}^{k}\epsilon_j M^{-j}+M^{-kR}\eta\right)\right)\ge\sum_{j=1}^{k}\delta(\epsilon_{(j-1)R},\cdots,\epsilon_{jR}),\quad\forall\,\eta\in[0,1]\text{。}\tag{2.2.24}$$

因此, 根据 (2.2.14) 和 (2.2.24), 对 $0 < p < \infty$ 以及 $k \geq 1$, 我们有下面的一系列估计:

$$
\begin{aligned}
&\int_{2M^{kR-1}\pi \leq |\xi| \leq 2M^{(k+1)R-1}\pi} |\widehat{f}(\xi)|^p \mathrm{d}\xi \\
&\quad \leq C \int_{2M^{kR-1}\pi}^{2M^{kR}\pi} |\widehat{f}(\xi)|^p \mathrm{d}\xi \\
&\quad \leq CM^{-kNRp} q^{kRp} \int_0^{2M^{kR}\pi} r^{p i_{kR}(M^{-kR}\xi)} \mathrm{d}\xi \\
&\quad \leq CM^{-kNRp} q^{kRp} \sum_{0 \leq \epsilon_j \leq M-1, 1 \leq j \leq R} \cdots \\
&\qquad\qquad \sum_{0 \leq \epsilon_j \leq M-1, (k-1)R+1 \leq j \leq kR} \int_0^1 r^{p i_{kR}(2\pi(\sum_{j=1}^{kR} \epsilon_j M^{-j} + M^{-kR}\eta))} d\eta \\
&\quad \leq CM^{-kNRp} q^{kRp} \sum_{0 \leq \epsilon_j \leq M-1, 1 \leq j \leq R} \cdots \\
&\qquad\qquad \sum_{0 \leq \epsilon_j \leq M-1, (k-1)R+1 \leq j \leq kR} \prod_{i=1}^{k} r^{p\delta(\epsilon_{(i-1)R+1}, \cdots, \epsilon_{iR})} \\
&\quad \leq CM^{-kNRp} q^{kRp} \left(\sum_{(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_R) \in \{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_R)} \right)^k 。
\end{aligned}
\tag{2.2.25}
$$

由 f 的 Fourier 变换的局部有界性,

$$
\int_{|\xi| \leq 2M^{R-1}\pi} |\widehat{f}(\xi)|^p \mathrm{d}\xi \leq C 。
$$

并与 (2.2.25) 结合起来就得到 $s_p(f), 0 < p < \infty$, 的下界估计式 (2.2.18)。 $\square$

定理2.2.2 中, 对 $\sum_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)}$ 的估计看起来非常复杂, 但对某些特殊的 D_0, 我们可以给出明确的表示式。如取 $D_0 = [-(M-1)\pi/M, (M-1)\pi/M]$, 我们可以归纳地证明

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)} \\
&\leq (1+(M-1)r^p) \sum_{(\epsilon_2,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^{R-1}} r^{p\delta(\epsilon_2,\cdots,\epsilon_R)}
\end{aligned}
$$

对所有的 $R \geq 2$ 成立。从而, 当 $M \geq 2$ 且为偶数时

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)} \\
&\quad \leq (2+(M-2)r^p)\left(1+(M-1)r^p\right)^{R-1} \text{。}
\end{aligned} \tag{2.2.26}
$$

当 $M \geq 3$ 且为奇数时

$$
\sum_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)} \leq \left(1+(M-1)r^p\right)^R \text{。} \tag{2.2.27}
$$

综合定理2.2.2 和上述关于 $\sum_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)\in\{0,1,\cdots,M-1\}^R} r^{p\delta(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_R)}$ 的估计式 (2.2.26) 和 (2.2.27), 我们得到下面的推论:

推论 2.2.1 **设细分分布** f **所对应的符号函数为** H, **划分** $D_m, 1 \leq m \leq Q$, **如定理2.2.2 所述。进一步假设** $H(\xi)$ **具有分解形**

式(2.2.14) 并满足条件(2.2.15)和 (2.2.16)。此时, 集合D_0取为$[-(M-1)\pi/M,(M-1)\pi/M]$。并且, 当M为偶数时, 取

$$D_1=[-M\pi/(M+1),M\pi/(M+1)] \quad \text{和} \quad D_2=[-\pi,\pi]\backslash D_1$$

当M为奇数时, 取 $D_1=[-\pi,\pi]$。则我们有

$$s_p(f)\geq N-\frac{\ln q}{\ln M}-\frac{\ln(1+(M-1)r^p)}{p\ln M}, \qquad 0<p<\infty\text{。}$$

上述推论可以被用来研究极小支撑正交尺度函数光滑性的渐近估计(参见 [64])。

2.3 光滑性：时域方法

为利用时域方法研究细分函数的光滑性, 我们引入一类函数空间L_*^p。当$1\leq p<\infty$时, L_*^p是通常的$L^p(\mathbb{R})$空间, 而当$p=\infty$时, 我们规定L_*^p为在无穷远处为零的有界连续函数全体。对非零正数k, 定义

$$L_*^{k,p}=\left\{f:\ f^{(l)}\in L_*^p,\ 0\leq l\leq k\right\}\text{。}$$

对一个2π周期函数$a(\xi)\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}}a(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 定义它的$F\ell^p$模为它的Fourier 系数的$\ell^p$模, 即

$$\|a(\xi)\|_{F\ell^p}=\|\{a(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^p}\text{。}$$

定理 2.3.1 设f满足下列细分方程

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)f(M\cdot-j), \quad \widehat{f}(0)=1 \tag{2.3.1}$$

以及 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|c(j)|(1+|j|)^2<\infty$。记 $H(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。设 $H(\xi)$ 有如下分解形式

$$H(\xi)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}\widetilde{H}(\xi), \tag{2.3.2}$$

而 $\widetilde{H}(\xi)$ 为连续的 2π 周期函数。如果存在常数 $C>0$ 和 $\gamma\in(0,1)$, 使得

$$\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^n\xi)\|_{F\ell^p}\le CM^{n/p}\gamma^n, \tag{2.3.3}$$

那么 $f\in L^p_*$。

证明: 定义 L^p_* 上的算子

$$Tg=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)g(M\cdot-j)\text{。} \tag{2.3.4}$$

显然细分函数 f 是映射 T 的不动点。再定义

$$h_0(x)=\begin{cases}1-|x|\,, & x\in[-1,1]\,,\\ 0\,, & x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]\,;\end{cases} \tag{2.3.5}$$

和

$$h_n(x)=T^nh_0(x),\qquad n\ge 1\text{。}$$

在 (2.3.4) 两边取 Fourier 变换后得到

$$(Tg)^\wedge(\xi)=H(\xi/M)\widehat{g}(\xi/M)\text{。}$$

从而

$$\widehat{h}_n(\xi)=H(\xi/M)\cdots H(\xi/M^n)\widehat{h}_0(\xi/M^n)\text{。} \tag{2.3.6}$$

由 $H(0)=1$ 以及 H 的 Hölder 连续性, 并结合 (2.3.1) 和 (2.3.6) 可知, $\widehat{h}_n(\xi)$ 在任意给定的紧集 K 上一致收敛于 $\prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/M^j) = \widehat{f}(\xi)$。从而由定理1.3.1 知 h_n 在分布意义下收敛于 f。因此我们只要证明: 存在正常数 $C>0$, 使得

$$\|h_{n+1}-h_n\|_p \le C\gamma^n, \tag{2.3.7}$$

其中 $\gamma \in (0,1)$ 如 (2.3.3) 所述。

记 $H_h(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}\right)^2$。那么由 (2.3.6) 可知

$$\begin{aligned}
&\widehat{h}_{n+1}(\xi)-\widehat{h}_n(\xi)\\
&=\prod_{j=1}^{n+1} H\left(\frac{\xi}{M^j}\right)\widehat{h}_0\left(\frac{\xi}{M^{n+1}}\right)-\prod_{j=1}^{n} H\left(\frac{\xi}{M^j}\right)\widehat{h}_0\left(\frac{\xi}{M^{n}}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n} H\left(\frac{\xi}{M^j}\right)\left(H\left(\frac{\xi}{M^{n+1}}\right)-H_h\left(\frac{\xi}{M^{n+1}}\right)\right)\widehat{h}_0\left(\frac{\xi}{M^{n+1}}\right)。
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

记

$$a_n(\xi)=(H(\xi)-H_h(\xi))\prod_{j=1}^{n} H(M^j\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \tag{2.3.9}$$

以及定义

$$H^*(\xi)=\frac{\widetilde{H}(\xi)-1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}-\frac{\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}-1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}。$$

由我们的假设知 $H^*(\xi)$ 的 Fourier 系数是一个可和序列。根据 (2.3.2), 我们有

$$a_n(\xi)=\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{n+1}\xi}\right)M^{-n-1}H^*(\xi)\prod_{j=1}^{n}\widetilde{H}(M^j\xi)。 \tag{2.3.10}$$

另一方面, 由 (2.3.8) 我们可得

$$h_{n+1}(x)-h_n(x)=M^{n+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_n(j)h_0(M^{n+1}x-j)\text{。}\quad(2.3.11)$$

因此, 综合 (2.3.10) 和 (2.3.11), 并利用 $\widetilde{H}(\xi)$ 的 Fourier 系数是可和序列这一事实, 我们得到

$$\begin{aligned}\|h_{n+1}-h_n\|_p &= M^{(n+1)(1-\frac{1}{p})}\|\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_n(j)h_0(x-j)\|_p\\ &\le 2^{1/p}M^{(n+1)(1-\frac{1}{p})}\|a_n(\xi)\|_{F\ell^p}\\ &\le CM^{-n/p}\|\textstyle\prod_{j=0}^{n-1}\widetilde{H}(M^j\xi)\|_{F\ell^p}\text{。}\end{aligned}$$

这与 (2.3.3) 结合便证明了 (2.3.7), 也就是 $f\in L_*^p$。 □

细分函数 $f\in L_*^p$ 的符号 H 所满足的充分条件 (2.3.3) 在某些情况下也是必要条件。

定理 2.3.2 设序列 $\{c(j)\}$ 具有有限长以及 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)=M$。又设细分函数 f 满足细分方程

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)f(M\cdot-j),\quad \widehat{f}(0)=1\text{。}\quad(2.3.12)$$

记 $H(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。并假设 $H(\xi)$ 有下面的分解形式

$$H(\xi)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}\widetilde{H}(\xi),$$

其中 $\widetilde{H}$ 为三角多项式。如果 $f\in L_*^p$ 且有稳定的整平移(详见 § 2.4 节), 即存在常数 C_0 使得对任意 ℓ^p 序列 $\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 成立

$$C_0^{-1}\|\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^p}\le\Big\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}d(j)f(\cdot-j)\Big\|_p\le C_0\|\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^p}\,,\quad(2.3.13)$$

那么存在常数 $C>0$ 和 $\gamma\in(0,1)$, 使得

$$\left\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^n\xi)\right\|_{F\ell^p}\le CM^{n/p}\gamma^n,\quad n\ge 1\text{。}\tag{2.3.14}$$

为证明定理2.3.2, 我们需要下面的一个重要结论。

引理 2.3.1 设 $a(\xi)$ 是一个三角多项式。如果

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\prod_{j=0}^{n}a(M^j\xi)\right\|_{F\ell^p}=0,\tag{2.3.15}$$

那么存在常数 $C>0$ 以及 $\gamma\in(0,1)$, 使得

$$\left\|\prod_{j=0}^{n}a(M^j\xi)\right\|_{F\ell^p}\le C\gamma^n\text{。}\tag{2.3.16}$$

证明: 不妨认为 $a(\xi)=\sum_{j=0}^{N}a(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。设 N' 为不超过 $N/(M-1)$ 的最大整数, 定义矩阵

$$B_\epsilon=(a(Mi-j+\epsilon))_{0\le i,j\le N'},\quad \epsilon=0,1,\cdots,M-1\text{。}\tag{2.3.17}$$

又记

$$a_n(\xi)=\prod_{j=0}^{n-1}a(M^j\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_n(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\text{。}$$

通过计算, 对任意向量 $\nu=(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{N'})^T$,

$$\|a_n(\xi)\nu(\xi)\|_{F\ell^p}=\begin{cases}\left(\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\nu\|_p^p\right)^{1/p}, & 1<p<\infty\\ \sup_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\nu\|_\infty, & p=\infty\text{。}\end{cases}\tag{2.3.18}$$

在此 $\nu(\xi)=\sum_{j=0}^{N'}\nu_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 和 $\mathbb{R}^{N'+1}$ 中向量 $\nu=(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{N'})^T$ 的范数 $\|\cdot\|_p$ 规定为

$$\|\nu\|_p=\begin{cases}\left(\sum_{j=0}^{N'}|\nu_j|^p\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty\,,\\ \sup_{0\le j\le N'}|\nu_j|, & p=\infty\,\text{。}\end{cases}$$

由 (2.3.15) 和 (2.3.18), 存在正数 n_0 使得对所有 $\nu\in\mathbb{R}^{N'+1}$ 成立

$$\left(\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{n_0}\in\{0,1,\cdots,M-1\}^{n_0}}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_{n_0}}\nu\|_p^p\right)^{1/p}\le\frac{1}{2}\|\nu\|_p\,,$$

$$1\le p<\infty,\qquad(2.3.19)$$

和

$$\sup_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{n_0}\in\{0,1,\cdots,M-1\}^{n_0}}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_{n_0}}\nu\|_\infty\le\frac{1}{2}\|\nu\|_\infty,\qquad p=\infty\,\text{。}\tag{2.3.20}$$

对任意 $n\ge n_0$, 写 $n=kn_0+m$, 其中 $0\le m<n_0$ 和 $0\le k\in\mathbb{Z}$。对 $1\le p<\infty$, 我们从 (2.3.18) 和 (2.3.19) 得到

$$\begin{aligned}\|a_n(\xi)\nu(\xi)\|_{F\ell^p}^p&=\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\nu\|_p^p\\&\le 2^{-p}\sum_{\epsilon_{n_0+1},\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^{n-n_0}}\|B_{\epsilon_{n_0+1}}\cdots B_{\epsilon_n}\nu\|_p^p\\&\le\cdots\\&\le 2^{-pk}\sum_{\epsilon_{kn_0+1},\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^m}\|B_{\epsilon_{kn_0+1}}\cdots B_{\epsilon_n}\nu\|_p^p\\&\le C2^{-pk}\|\nu\|_p^p\,,\end{aligned}$$

上述的常数C是一个与n和$\nu \in \mathbb{R}^{N'+1}$无关的常数。从而当取$\gamma = 2^{-1/n_0}$时，便证明了(2.3.16)对$1 \le p < \infty$成立。类似地利用(2.3.18)和(2.3.20)，可以证明(2.3.16)在$p = \infty$时也成立。 □

现在我们可以开始证明定理2.3.2。

定理2.3.2的证明: 根据(2.3.12)，$\widehat{f}(\xi) = H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)$。因此

$$\widehat{f}(\xi) = H(\xi/M)\cdots H(\xi/M^n)\widehat{f}(\xi/M^n)\text{。}$$

这样，

$$\begin{aligned} & \widehat{f}(\xi) - e^{-i\xi/M^n}\widehat{f}(\xi) \\ = \;& H(\xi/M)\cdots H(\xi/M^n)(1 - e^{-i\xi/M^n})\widehat{f}(\xi/M^n) \\ = \;& M^{-n}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})\widetilde{H}(\xi/M)\cdots\widetilde{H}(\xi/M^n)\widehat{f}(\xi/M^n)\text{。} \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

记$\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_n(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。由(2.3.21)我们得到

$$f(x) - f(x - M^{-n}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(h_n(j) - h_n(j + M^n))f(M^n x - j)\text{。} \tag{2.3.22}$$

又由$f \in L_*^p$知

$$\lim_{n\to+\infty}\|f(x) - f(x - M^{-n})\|_p = 0\text{。} \tag{2.3.23}$$

综合(2.3.13), (2.3.22)和(2.3.23),

$$\lim_{n\to+\infty} M^{-n/p}\|(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi M^n})\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p} = 0\text{。} \tag{2.3.24}$$

由于 $\widetilde{H}(\xi)$ 是一个三角多项式, $\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)$ 是一个次数不超过 CM^n 的三角多项式。从而存在与 n 无关的常数 C, 使得

$$\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p}\le C\|(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi M^n})\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p}\text{。}\tag{2.3.25}$$

结合 (2.3.24) 和 (2.3.25), 这就得到

$$\lim_{n\to\infty} M^{-n/p}\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p}=0\text{。}\tag{2.3.26}$$

至此, 结论 (2.3.14) 显然可由 (2.3.26) 和引理2.3.1 得到。 □

设 $\{\widetilde{c}(j)\}_{j=0}^N$ 满足 $\sum_{j=0}^N\widetilde{c}(j)=M$。记 N' 为不超过 $N/(M-1)$ 的最大整数。定义

$$B_\epsilon=(\widetilde{c}(Mi-j+\epsilon))_{0\le i,j\le N'},\qquad \epsilon=0,1,\cdots,M-1\text{。}\tag{2.3.27}$$

设 $\|\cdot\|$ 为任一矩阵模, 定义由 $B_0,\cdots,B_{M-1}$ 所产生的联合谱半径为:

$$\rho_p(B_0,\cdots,B_{M-1})=\begin{cases}\displaystyle\lim_{\overline{n\to+\infty}}\left(\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\|^p\right)^{1/np}, & 1\le p<\infty\\ \displaystyle\lim_{\overline{n\to+\infty}}\sup_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n}\|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\|^{1/n}, & p=\infty\text{。}\end{cases}\tag{2.3.28}$$

不难证明:

$\rho_p(B_0, \cdots, B_{M-1})$

$$= \begin{cases} \inf_{n\ge1}\left(\sum_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n} \|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\|^p\right)^{1/np}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\le p<\infty \\ \inf_{n\ge1}\sup_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\in\{0,1,\cdots,M-1\}^n} \|B_{\epsilon_1}\cdots B_{\epsilon_n}\|^{1/n}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p=\infty\text{。} \end{cases}$$

根据定理2.3.1 和定理2.3.2 的证明, 我们得到下面的结论。

推论 2.3.1 设 $\{\widetilde{c}(j)\}_{j=0}^N$ 满足 $\sum_{j=0}^N \widetilde{c}(j) = M$, f 满足下列细分方程

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(M\cdot -j), \quad \widehat{f}(0) = 1,$$

而

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{c}(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\text{。}$$

设 B_ϵ, $\epsilon = 0, 1, \cdots, M-1$, 和联合谱半径 $\rho_p(B_0, \cdots, B_{M-1})$ 如 (2.3.27) 和 (2.3.28) 所定义。那么, 当 $\rho_p(B_0, \cdots, B_{M-1}) < M^{1/p}$ 时, $f \in L_*^p$。而当 $f \in L_*^p$ 并有稳定的整平移时, $\rho_p(B_0, \cdots, B_{M-1})$ $< M^{1/p}$。

如果 $H, \widetilde{H}$ 为两个三角多项式, $H(\xi) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\widetilde{H}(\xi)$ 且 $\widetilde{H}(0)$ $= 1$, 那么分别以 $H, \widetilde{H}$ 为符号的细分解 f 和 $\widetilde{f}$ 满足

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} H(M^{-j}\xi) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}\prod_{j=1}^{\infty}\widetilde{H}(M^{-j}\xi) \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}\mathcal{F}(\widetilde{f})(\xi)\text{。} \end{aligned}$$

由此
$$(\mathrm{i}\xi)\mathcal{F}(f)(\xi) = (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})\mathcal{F}(\widetilde{f})(\xi)\text{。}$$
也就是说 f 在分布意义上的导数是 $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\cdot - 1)$。由 $\widetilde{f}$ 的紧支撑性知 $\widetilde{f} \in L_*^p$ 与 $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\cdot - 1) \in L_*^p$ 等价。因此我们可以通过对符号的分解来研究何时 $f \in L_*^{k,p}$。

定理 2.3.3 设紧支撑分布 f 满足以下细分方程
$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(M\cdot - j), \quad \widehat{f}(0) = 1,$$
而有限序列 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 所对应的三角函数 $H(\xi)$ 可分解为
$$H(\xi) = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M - M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^{k+1} \widetilde{H}(\xi)\,,$$
且 $\widetilde{H}(\xi)$ 仍为三角多项式。如果存在正数 $C > 0$ 和 $\gamma \in (0,1)$ 使得,
$$\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p} \le CM^{n/p}\gamma^n, \qquad n \ge 0\text{。} \tag{2.3.29}$$
那么 $f, f', \cdots, f^{(k)} \in L_*^p$。反之, 如果 f 有稳定的整平移和 f, f', $\cdots, f^{(k)} \in L_*^p$, 那么 (2.3.29) 成立。

2.4 稳定性

一个缓增分布 f 在满足下列条件时被称为具有 ℓ^1 衰减的缓增分布:

(i) 对任意的 Schwartz 函数 h, $\langle f(\cdot+x), h\rangle$ 关于 x 连续；

(ii) 存在自然数 k_0, k_1 和正常数 C, 使得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle f(\cdot,+j), h\rangle| \le C \sum_{|\alpha|\le k_0} \|h^{(\alpha)}(x)(1+|x|)^{k_1}\|_\infty$$

对所有 Schwartz 函数 h 成立。

容易验证, 紧支撑的缓增分布和可积函数都具有 ℓ^1 衰减性。事实上, 一个具有连续 Fourier 变换且满足细分方程

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) f(M\cdot -n)\,, \quad \widehat{f}(0) = 1$$

的缓增分布 f, 在序列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^2|c(n)| < \infty$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) = M$ 时, 就是一个具有 ℓ^1 衰减的缓增分布([68])。对具有 ℓ^1 衰减的缓增分布 f, 定义

$$K_\infty(f) = \left\{ (\omega(j))_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty : \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega(j) f(\cdot - j) \equiv 0 \right\} 。$$

当 $K_\infty(f) = \{0\}$ 时, 我们称 f 具有稳定的整平移。有时也简称 f 是稳定的。对具有 ℓ^1 衰减的缓增分布, 我们有下面的性质：

定理 2.4.1 ([68]) **设 f 是一个具有 ℓ^1 衰减的缓增分布。那么下列条件相互等价：**

(i) f **具有稳定的整平移;**

(ii) **对任意** $\xi \in \mathbb{R}$, **存在整数** $k := k(\xi)$ **使得** $\widehat{f}(\xi+k) \neq 0$;

(iii) **存在紧支撑的** $\mathbb{C}^\infty$ **函数** h, **使得对所有** $\xi \in \mathbb{R}$ **成立**

$$\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{h}(\xi+2\pi k)} \right| \neq 0 。$$

更进一步, 当 f 是一个可测函数且 $\int_0^1\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f(x+j)|\right)^2\mathrm{d}x<\infty$ 时, 我们有如下的结果。

定理 2.4.2 ([41]) 设 f 是一个可测函数且满足 $\int_0^1(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f(x+j)|)^2\mathrm{d}x<\infty$。那么下面条件相互等价:

(i) f 具有稳定的整平移;

(ii) 存在正常数 $0<A_1\le B_1<\infty$, 使得

$$\begin{aligned} A_1\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|d(n)|^2\right)^{1/2} &\le \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}d(n)f(\cdot-n)\Big\|_2 \\ &\le B_1\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|d(n)|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

对所有 ℓ^2 序列 $\{d(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 成立;

(iii) 存在正常数 $0<A_2\le B_2<\infty$, 使得

$$A_2\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(\xi+2n\pi)|^2\le B_2,\qquad\forall\xi\in\mathbb{R}。$$

对细分分布整平移的稳定性, 我们还可以用它的符号来刻画。

定理 2.4.3 设 f 具有连续的 Fourier 变换, 并满足细分方程

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)f(M\cdot-n),\quad \widehat{f}(0)=1。\tag{2.4.1}$$

进一步假设其系数序列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)|c(n)|<\infty$ 和 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)=M$。记 $H(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$, 那么下列条件相互等价:

(i) f 具有稳定的整平移;

(ii) 存在紧集 K, 使得 0 是 K 的内点, $K+2\pi\mathbb{Z}=\mathbb{R}$, 以及对所有 $\xi\in K$ 和自然数 j 成立 $H(M^{-j}\xi)\neq 0$。

证明： 先证(ii)$\Longrightarrow$(i)。在 (2.4.1) 两边取 Fourier 变换后就成为$\widehat{f}(\xi)=H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)$, 从而

$$\widehat{f}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}H(M^{-j}\xi), \tag{2.4.2}$$

这里我们已利用了假设条件$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)|c(n)|<\infty$和$H(0)=1$来保证 (2.4.2) 右边的无穷乘积有意义(参见引理2.1.1 和定理2.1.2)。从 (2.4.2) 和假设条件 (ii) 我们得到

$$\widehat{f}(\xi)\neq 0, \qquad \forall\,\xi\in K\ 。 \tag{2.4.3}$$

至此 (i) 可由 (2.4.3) 和定理2.4.1 推出。

再证(i)$\Longrightarrow$(ii)。由定理2.4.1, 对任意$\xi\in\mathbb{R}$存在整数$k:=k(\xi)$使得$\widehat{f}(\xi+2\pi k)\neq 0$。由$\widehat{f}$的连续性, $\widehat{f}(0)=1$, 且存在有限个区间$[a_i,b_i]\subset[-\pi,\pi]$, 整数$k_i$和正数$C$使得$\bigcup_i[a_i,b_i]=[-\pi,\pi]$ 并且$|\widehat{f}(\xi+2\pi k_i)|\geq C$对所有$\xi\in[a_i,b_i]$成立。进一步, 我们可以假定: 0属于某个区间$[a_i,b_i]$的内部且对这个区间$[a_i,b_i]$所对应的整数k_i取为零。定义

$$K=\bigcup_i([a_i,b_i]+2\pi k_i)\ 。$$

那么0是K的内点, $K+2\pi\mathbb{Z}=\mathbb{R}$, 同时$|\widehat{f}(\xi)|\geq C$对所有$\xi\in K$成立。对上述选择的集合$K$, 由 (2.4.2) 知, 对所有$j\geq 1$和$\xi\in K$成立$H(M^{-j}\xi)\neq 0$。 $\square$

定理 2.4.4 设 f 是一个紧支撑分布并满足细分方程

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) f(M \cdot -n), \quad \widehat{f}(0) = 1 \text{。} \tag{2.4.4}$$

又设序列 $\{c(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 具有有限长。记 $C(z) = \frac{1}{M} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) z^n$, 那么下列条件相互等价:

(i) f 具有稳定的整平移;

(ii) 不存在 Laurent 多项式 $C_1(z)$ 和 $C_2(z)$, 使得 $C_1(z)$ 不为单项式, $C_1(1) \neq 0$, $C_1(z)$ 的所有根在圆周 $|z| = 1$上, 以及

$$C(z) = \frac{C_1(z^M)}{C_1(z)} C_2(z) \text{。} \tag{2.4.5}$$

证明: 我们先利用反证法证明(i)$\Longrightarrow$(ii)。假设 f 具有稳定的整平移并存在 Laurent 多项式 $C_1(z)$ 和 $C_2(z)$, 使得 $C_1(z)$ 不为单项式, $C_1(1) \neq 0$, $C_1(z)$ 的根都在 $|z| = 1$ 上且 (2.4.5) 成立。根据 (2.4.4), 我们知道

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} C(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j}\xi}) \text{。} \tag{2.4.6}$$

又由 $C_1(1) \neq 0$ 和 (2.4.5), 显然 $C_2(1) = 1$。故 $\prod_{j=1}^{\infty} C_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j}\xi})$ 是一个连续函数。进一步由 (2.4.5) 可得

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{C_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j+1}\xi})}{C_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j}\xi})} \times \prod_{j=1}^{\infty} C_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j}\xi}) \\ &= (C_1(1))^{-1} C_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}) \prod_{j=1}^{\infty} C_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j}\xi}) \text{。} \end{aligned}$$

设 $z_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_1}, \xi_1 \in \mathbb{R}$, 是 $C_1(z)$ 的一个根。那么

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi_1+2k\pi) &= (C_1(1))^{-1}C_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_1})\prod_{j=1}^{\infty}C_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M^{-j}(\xi_1+2k\pi)}) \\ &= 0\,, \qquad \forall k\in\mathbb{Z}\,。\end{aligned}$$

根据定理2.4.1, f 的整平移是不稳定的, 这与假设矛盾。

我们再采用反证法证明 (ii)$\Longrightarrow$(i)。反之, 由定理2.4.1 和 $\widehat{f}(0)$ $=1$, 存在 $\xi_0\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ 使得

$$\widehat{f}(\xi_0+2\pi k)=0, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,。\tag{2.4.7}$$

不妨假定不存在实数 η, 使得

$$C\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta+2\pi s/M)}\right)=0, \quad 对\ s=0,1,\cdots,M-1\ 成立。\tag{2.4.8}$$

否则, 我们在取 $C_1(z)=\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\eta}\right)$ 和 $C_2(z)=\frac{C(z)C_1(z)}{C_1(z^M)}$ 后就产生了矛盾。由细分方程 (2.4.4),

$$\widehat{f}(\xi)=C(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/M})\widehat{f}(\xi/M)\,。\tag{2.4.9}$$

由 (2.4.7), (2.4.8) 和 (2.4.9), 存在 $\xi_1\in[-\pi,\pi]$, 使得

$$M\xi_1=\xi_0 \bmod 2\pi \quad 和 \quad \widehat{f}(\xi_1+2\pi k)=0, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,。$$

重复上述过程, 我们得到一序列 $\xi_j\in[-\pi,\pi), j\geq 0$, 使得 $M\xi_j=\xi_{j-1} \bmod 2\pi$ 和 $\widehat{f}(\xi_j+2\pi k)=0$ 对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 成立。由于 $\widehat{f}(\xi)$ 可扩张为复平面上的解析函数, 从而在 $[-\pi,\pi]$ 上 $\widehat{f}(z)$ 只有有限个零点, 这说明存在 $i_1<i_2$ 使得 $\xi_{i_1}=\xi_{i_2}$。由于 $\xi_0=M^{i_1}\xi_{i_1} \bmod 2\pi$, 因此 $\xi_0=\xi_{i_2-i_1}$。设 N 为满足 $\xi_0=\xi_N$ 的最小正整数, 那

么 $\xi_i \neq \xi_j \bmod 2\pi$ 对所有 $0 \leq i \neq j < N$ 成立。

现在我们利用反证法证明:

$$C\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_i+2\pi s/M)}\right) = 0, \qquad 1 \leq i \leq N, \quad s = 1, 2, \cdots, M-1\text{。} \tag{2.4.10}$$

反之, $C\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_i+2\pi s/M)}\right) \neq 0$ 对某个 $1 \leq i \leq N$ 和 $s = 1, 2, \cdots, M-1$ 成立。那么, 由 $\widehat{f}(\xi_{i-1}+2\pi k) = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 成立, 得

$$\widehat{f}\left(\xi_i + \frac{2\pi s}{M} + 2\pi k\right) = \frac{\widehat{f}(\xi_{i-1}+2\pi(s+Mk))}{C\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi_i+2\pi s/M)}\right)} = 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\text{。}$$

取 $\eta_0 = \xi_i + 2\pi s/M$ 并利用前面的推导, 存在 $\eta_1, \cdots, \eta_{N_1} \in [-\pi, \pi)$ 使得 $\eta_{i-1} = M\eta_i \bmod 2\pi$ 对所有 $1 \leq i \leq N_1$ 和 $\eta_{N_1} = \eta_0 \bmod 2\pi$ 成立, 从而 $\eta_0 = M^{N_1}\eta_0 \bmod 2\pi$。注意到 $M\eta_0 = \xi_{i-1} \bmod 2\pi$, 因此对某个 $0 \leq j \leq N-1$

$$\xi_i + \frac{2\pi s}{M} = \xi_j \mod 2\pi\text{。}$$

由于 $s \neq 0$, 从而 $i \neq j$, 在上式两边乘 M 后就得到 $\xi_{i-1} = \xi_{j-1} \bmod 2\pi$, 这与 N 的选择矛盾。从而 (2.4.10) 得证。

由 (2.4.8) 和 (2.4.10) 推得 $C\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_i}\right) \neq 0$。因此, 对 $0 \leq i \leq N-1$

$$\left(z^M - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi_i}\right) / \left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_i}\right) = \left(z^M - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_{i-1}}\right) / \left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_i}\right)$$

是 $C(z)$ 的因子, 在此定义 $\xi_{-1} = \xi_{N-1}$。从而

$$\prod_{i=0}^{N-1}\left(z^M - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_i}\right) \Big/ \prod_{i=0}^{N-1}\left(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_i}\right)$$

是 $C(z)$ 的因子。取 $C_1(z) = \prod_{i=0}^{N-1}\left(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi_i}\right)$, 那么 $C(1) \neq 0$, $C(z)$ 的所有根都在圆盘 $|z| = 1$ 上, 以及 $C_1(z^M)/C_1(z)$ 是 $C(z)$ 的因子。 $\square$

2.5 正交性

设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 如果

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+k)\overline{f(x+l)}\mathrm{d}x = \begin{cases} 1\,, & k = l \\ 0\,, & k \neq l \end{cases} \tag{2.5.1}$$

对所有 $k, l \in \mathbb{Z}$ 成立, 则我们称 f 的整平移是正交的, 有时也简称为 f 是正交的。不难证明, f 的整平移是正交的充分必要条件是

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(\xi + 2\pi n)\right|^2 = 1\,, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\,。 \tag{2.5.2}$$

由 (2.5.2) 和定理2.4.2 知, 对一个满足 $\int_0^1 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f(x+j)|\right)^2 \mathrm{d}x < \infty$ 的函数 f, 其整平移的正交性蕴涵了它的稳定性。对紧支撑的细分函数 f, 其整平移的正交性和稳定性有下面的相互关系。

定理 2.5.1 **设紧支撑函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 满足细分方程**

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) f(M\cdot - n), \quad \widehat{f}(0) = 1\,。 \tag{2.5.3}$$

而序列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 具有有限长度且满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) = M$。记 $H(\xi)$ $= \frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。那么, f 的整平移是正交的充分必要条件是: f 有稳定的整平移且符号 H 满足 CQF 条件, 即

$$\sum_{s=0}^{M-1} |H(\xi + 2s\pi/M)|^2 = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}\,。$$

证明: 先证必要性。首先由 (2.5.2) 和定理2.4.1, f 有稳定的整平移。在 (2.5.3) 两边取 Fourier 变换后, $\widehat{f}(\xi) = H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)$。将此式代入 (2.5.2) 的左边, 我们得到

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2\pi j}{M}\right)\right|^2 \left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2\pi j}{M}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2\pi s}{M} + 2\pi j\right)\right|^2 \left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2\pi s}{M} + 2\pi j\right)\right|^2 \\
&= \sum_{s=0}^{M-1} \left| H\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2\pi s}{M}\right)\right|^2 \text{。}
\end{aligned}$$

这就证明了 H 满足 CQF 条件。

再证充分性。根据定理2.4.2, 存在正常数 A 和 B, 使得

$$0 < A \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(\xi + 2\pi j)\right|^2 \le B \text{。}$$

我们引入辅助函数 f_0, 它的 Fourier 变换为

$$\widehat{f_0}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(\xi+2\pi j)\right|^2\right)^{1/2}} \text{。}$$

定义函数序列 $f_n, n \ge 1$, 为

$$\widehat{f_n}(\xi) = H(\xi/M)\widehat{f_{n-1}}(\xi/M) \text{。}$$

不难验证

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f_0}(\xi + 2\pi j)\right|^2 = 1 \text{。} \tag{2.5.4}$$

由 (2.5.4) 和 CQF 条件, 并利用归纳法, 我们不难验证

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f_n}(\xi + 2\pi j)\right|^2 = 1, \quad n \ge 0 \text{。} \tag{2.5.5}$$

从 f_n 的定义我们又可看到

$$\widehat{f_n}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\widehat{f}(M^{-n}\xi+2\pi j)\Big|^2\Big)^{-1/2}\text{。}\tag{2.5.6}$$

依据 Poisson 求和公式,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\widehat{f}(\eta+2\pi j)\Big|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x)f(x+k)\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\eta}\text{。}\tag{2.5.7}$$

由 (2.5.2), (2.5.5), (2.5.6) 和 (2.5.7), 要证明 f 整平移的正交性, 即

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\widehat{f}(\xi+2\pi j)\Big|^2=1,\qquad \xi\in\mathbb{R},$$

我们只需证明

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}f(x)f(x+k)\mathrm{d}x=1\text{。}\tag{2.5.8}$$

由 CQF 条件和 $H(0)=1$ 知

$$H(2\pi s/M)=0,\qquad s=1,2,\cdots,M-1\text{。}$$

从而由细分方程的频域公式 $\widehat{f}(\xi)=H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)$ 可得

$$\widehat{f}(2\pi k)=0,\qquad 0\neq k\in\mathbb{Z}\text{。}\tag{2.5.9}$$

由 (2.5.9) 和 Poisson 求和公式, 我们得到 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x+k)=1$。把上式代入到 (2.5.8) 的左边,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}f(x)f(x+k)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x=\widehat{f}(0)=1\text{。}$$

这便完成了 (2.5.8) 的证明, 同时也证明了定理2.5.1。 □

对任一紧支撑的 $L^2(\mathbb{R})$ 函数 f, 记

$$F(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(\xi+2j\pi)\right|^2 \text{。}$$

由 Poisson 求和公式,

$$F(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\int_{\mathbb{R}}f(x)f(x-k)\mathrm{d}x$$

且 $F(\xi)$ 是一个三角多项式。当 f 是一个细分函数时, 即

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)f(M\cdot-j), \tag{2.5.10}$$

我们有细分方程的频域公式 $\widehat{f}(\xi)=H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)$, 其中序列 $\{c(n)\}$ 具有有限长和 $H(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。从而

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|H\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2j\pi}{M}\right)\right|^2\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2j\pi}{M}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{s=0}^{M-1}\left|H\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2s\pi}{M}\right)\right|^2 F\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2s\pi}{M}\right) \text{。}
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

定义转移算子 $T_{|H|^2}$ 为:

$$T_{|H|^2}g(\xi)=\sum_{s=0}^{M-1}\left|H\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2j\pi}{M}\right)\right|^2 g\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2j\pi}{M}\right),$$

在此 g 是 2π 周期函数。从而 $F(\xi)$ 是转移算子 $T_{|H|^2}$ 的不动点,

$$F(\xi)=T_{|H|^2}F(\xi) \text{。}$$

根据 H 的 CQF 条件, 1 是 $T_{|H|^2}$ 的不动点。因此, 如果 $T_{|H|^2}$ 的不动点是惟一的, 那么 f 的整平移具有正交性。

由于 f 的平移 $f(\cdot - t)$ 不影响它整平移的正交性。我们不妨认为 (2.5.10) 的面具 $\{c(j)\}$ 满足 $c(0)c(N) \neq 0$, 而对所有 $j < 0$ 和 $j > N$ 有 $c(j) = 0$。此时细分函数 f 支撑于 $[0, \frac{N}{M-1}]$。取 N' 为严格小于 $\frac{N}{M-1}$ 的最大正整数, 记

$$V_{N'} = \left\{ \sum_{j=-N'}^{N'} \alpha(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \quad \alpha(j) \in \mathbb{R} \right\} 。$$

那么 $F(\xi)$ 可写作为 $F(\xi) = \sum_{j=-N'}^{N'} \alpha(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 从而 $F(\xi) \in V_{N'}$。容易验证 $T_{|H|^2}$ 是 $V_{N'}$ 上的线性算子。由于 $V_{N'}$ 是一个有限维空间, $T_{|H|^2}$ 可以用一个有限维矩阵表示。记

$$\begin{aligned} |H(\xi)|^2 &= \left| \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{N} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{k=-N}^{N} \left(\sum_{l=\max(0,-k)}^{\min(N,N+k)} C(l+k)C(l) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=-N}^{N} h(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi} 。\end{aligned}$$

对任意 $g(\xi) = \sum_{j=-N'}^{N'} \alpha(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 通过计算

$$\begin{aligned} T_{|H|^2} g(\xi) &= \sum_{s=0}^{M-1} \left| H\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2s\pi}{M}\right) \right|^2 g\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2s\pi}{M}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=-N'}^{N'} h(k)\alpha(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+j)(\xi/M+2s\pi/M)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N}\sum_{j=-N'}^{N'} h(k)\alpha(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+j)\xi/M}\frac{1}{M}\sum_{s=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+j)2s\pi/M}$$

$$= \sum_{j=-N'}^{N'}\left(\sum_{j'=-N'}^{N'} h(Mj-j')\alpha(j')\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\ 。$$

令

$$B = (h(Mj-j'))_{-N'\le j,j'\le N}\ 。$$

那么

$$T_{|H|^2}g = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}N'\xi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(N'-1)\xi}, \cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N'\xi}\right) B\Big(\alpha(-N'), \cdots, \alpha(N')\Big)^T 。$$

因此, 当 1 是矩阵 B 的特征值且特征空间为一维时, f 的整平移有正交性。从而当 1 是特征多项式 $T(\lambda) = \det(\lambda I - B)$ 的单根时, f 的整平移有正交性。事实上，上述结论反过来也正确。

定理 2.5.2 **设** f **是一个** $L^2(\mathbb{R})$ **函数且满足细分方程**

$$f = \sum_{j=0}^{N} c(j)f(M\cdot -j), \quad \widehat{f}(0) = 1\ 。 \tag{2.5.12}$$

又设序列 $\{c(j)\}_{j=0}^N$ **所对应的函数** $H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^N c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ **满足** $H(0) = 1$ **和** $\sum_{s=0}^{M-1}|H(\xi+\frac{2\pi s}{M})|^2 \equiv 1$**。那么**, f **的整平移是正交的充分必要条件是**: 1 **是特征多项式** $T(\lambda)$ **的单根。**

证明：基于前面的陈述, 我们只需证明必要性。用反证法证明。反之 1 是 $T(\lambda)$ 的多重根。记 δ=$(\delta(-N'+1), \cdots, \delta(N'-1))^T$ $= (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$。注意到 H 的 CQF 条件, 我们有

$$B\delta = \delta\ 。 \tag{2.5.13}$$

由于 1 是 $T(\lambda)$ 的多重根的假设，存在 $\beta\in\mathbb{R}$ 和非零向量 $\nu=(\nu(-N'+1),\cdots,\nu(N'-1))^T$，使得 $\nu(0)=0$ 并且

$$B\nu=\nu+\beta\delta\text{。}\tag{2.5.14}$$

记

$$e(\xi)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N'-1)\xi},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N'-1)\xi}\right)^T\text{。}$$

对任意向量 $\omega=(\omega(-N'+1),\cdots,\omega(N'-1))^T$，通过计算，

$$\sum_{s=0}^{M-1}|H(\xi+2s\pi/M)|^2e(\xi+2s\pi/M)^T\omega=e(M\xi)^TB\omega\text{。}\tag{2.5.15}$$

综合 (2.5.14) 和 (2.5.15) 我们得到

$$\sum_{s=0}^{M-1}|H(\xi+2s\pi/M)|^2e(\xi+2s\pi/M)^T\nu=e(M\xi)^T\nu+\beta\text{。}\tag{2.5.16}$$

通过 Fourier 变换，定义 f_n, $n\geq 1$, 为

$$\widehat{f}_n(\xi)=e(M^{-n}\xi)^T\nu\widehat{f}(\xi)\text{。}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{f}_n(\xi)=e(0)^T\nu\widehat{f}(\xi),\qquad \xi\in\mathbb{R},\tag{2.5.17}$$

并且存在与 n,ξ 无关的正常数 C，使得

$$|\widehat{f}_n(\xi)|\leq C|\widehat{f}(\xi)|,\qquad \xi\in\mathbb{R}\text{。}\tag{2.5.18}$$

由 $f_n, n\geq 0$, 的构造可知

$$\widehat{f}_n(\xi)=H(\xi/M)\widehat{f}_{n-1}(\xi/M)\text{。}\tag{2.5.19}$$

另外再定义

$$\alpha_n(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n(\xi+2j\pi)\overline{\widehat{f}(\xi+2j\pi)}\text{。}$$

那么, 由 (2.5.17), (2.5.18) 及 f 的正交性得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\alpha_n(\xi) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n(\xi+2j\pi)\overline{\widehat{f}(\xi+2j\pi)}\\ &= e(0)^T\nu\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(\xi+2j\pi)|^2=e(0)^T\nu\text{。}\end{aligned}\tag{2.5.20}$$

对 $n=0$ 规定

$$\alpha_0(\xi)=e(\xi)^T\nu\text{。}\tag{2.5.21}$$

综合 (2.5.15), (2.5.19) 和 (2.5.21), 我们可以归纳地证明

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}(\xi) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|H\left(\frac{\xi+2j\pi}{M}\right)\right|^2\widehat{f}_n\left(\frac{\xi+2j\pi}{M}\right)\overline{\widehat{f}\left(\frac{\xi+2j\pi}{M}\right)}\\ &= \sum_{s=0}^{M-1}\left|H\left(\frac{\xi+2s\pi}{M}\right)\right|^2\\ &\quad\times\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}_n\left(\frac{\xi+2s\pi}{M}+2j\pi\right)\overline{\widehat{f}\left(\frac{\xi+2s\pi}{M}+2j\pi\right)}\\ &= \sum_{s=0}^{M-1}\left|H\left(\frac{\xi+2s\pi}{M}\right)\right|^2\alpha_n\left(\frac{\xi+2s\pi}{M}\right)\\ &= e(\xi)^T\nu+(n+1)\beta\text{。}\end{aligned}\tag{2.5.22}$$

结合 (2.5.20) 和 (2.5.22) 可得 $\beta=0$ 以及 $e(\xi)^T\nu=e(0)^T\nu$。由 $\xi\in\mathbb{R}$ 的任意性和 $\nu(0)=0$, 不难推出 ν_0 是一个零向量, 这与假设矛盾。 $\square$

2.6 线性无关性

设 f 为一个紧支撑分布。定义它的半卷积 $f*'$ 为一个从序列空间到广义函数的映射:

$$\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} d(j) f(\cdot - j)\text{。}$$

如果 f 的半卷积 $f*'$ 是一个一一映射, 我们称 f 有线性无关的整平移 或简称为线性无关, 有时也称为整体线性无关。对于紧支撑的分布 f, 它的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\xi)$ 是一个复平面 $\mathbb{C}$ 上的解析函数在实轴上的限制。事实上

$$\widehat{f}(z) = \langle e^{-iz\cdot}, f\rangle, \quad z\in\mathbb{C},$$

是 Fourier变换在复平面上的扩充。同时,我们称$\widehat{f}(z)$为f的 Fourier -Lapalace 变换。有时, 为简便起见, 我们仍称 $\widehat{f}(z)$ 为 f 的 Fourier 变换。对紧支撑的分布f, 它的线性无关整平移可以用它的 Fourier-Lapalace 变化刻画。

定理 2.6.1 ([42, 55, 77]) 设 f 是一个紧支撑的缓增分布。那么下列条件互相等价:

(i) f 有线性无关的整平移;

(ii) 对任何一个复数 z_0, 存在整数 $k := k(z_0)$ 使得 $\widehat{f}(z_0+2\pi k) \neq 0$;

(iii) 存在紧支撑的 $\mathbb{C}^\infty$ 函数 h, 使得 $\langle f, h(\cdot - k)\rangle = \delta_{k,0}$ 对所有整数 k 成立。

从定理2.4.1和定理2.6.1, 当紧支撑分布有线性无关的整平移时, 它的整平移也是稳定的。对紧支撑的细分分布, 我们有下面的结论。

定理 2.6.2 设 f 是紧支撑的细分分布, 它的符号函数 H 是一个三角多项式。那么, f 的整平移是线性无关的充分必要条件是: f 有稳定的整平移并且对所有复数 $\zeta \in \mathbb{C}$ 成立

$$\sum_{s=0}^{M-1} \left| H\left(\zeta + \frac{2\pi s}{M}\right) \right|^2 \neq 0\,。$$

证明: 先证必要性。显然只要证明 $\sum_{s=0}^{M-1} |H(\zeta + 2\pi s/M)|^2 \neq 0$ 对所有复数 ζ 成立。如果上述结论不成立, 那么存在复数 ζ_0 使得

$$H(\zeta_0 + 2\pi s/M) = 0, \qquad s = 0, 1, \cdots, M-1\,。 \tag{2.6.1}$$

利用细分分布的频域表示式

$$\widehat{f}(M\zeta) = H(\zeta)\widehat{f}(\zeta)\,, \tag{2.6.2}$$

并与 (2.6.1) 结合, 我们得到

$$\widehat{f}(M\zeta_0+2\pi k) = H(\zeta_0+2\pi k/M)\widehat{f}(\zeta_0+2\pi k/M) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}\,。$$

从而, 由定理2.6.1可知, f 的整平移是线性相关的, 这与假设矛盾。

我们采用反证法来证明充分性。假设 f 的整平移是线性相关的。那么, 由定理2.6.1知, 存在复数 ζ_0, 使得

$$\widehat{f}(\zeta_0 + 2k\pi) = 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,。$$

由定理2.4.1和我们的假设条件知$\zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$。继续利用假设条件和(2.6.1)及(2.6.2), 存在$\zeta_1 = \frac{\zeta_0}{M} + \frac{2\pi s}{M}$使得$\mathrm{Re}\,\zeta_1 \in [-\pi, \pi]$, $M\zeta_1 - \zeta_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$以及$H(\zeta_1) \neq 0$。从而由

$$0 = \widehat{f}(M\zeta_1 + 2Mk\pi) = H(\zeta_1)\widehat{f}(\zeta_1 + 2k\pi), \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

推得$\widehat{f}(\zeta_1 + 2k\pi) = 0$对所有的整数$k \in \mathbb{Z}$成立。反复利用上述过程, 存在$\zeta_j, j \geq 1$, 使得$\mathrm{Re}\,\zeta_j \in [-\pi, \pi]$, $M\zeta_j - \zeta_{j-1} \in 2\pi\mathbb{Z}$并且对所有整数$k$成立$\widehat{f}(\zeta_j + 2k\pi) = 0$。注意到$\mathrm{Re}\,\zeta_j \in [-\pi, \pi]$, 因此, 存在$\eta$使得$\eta$为$\mathrm{Re}\zeta_j, j \geq 1$ 的聚点。由于$\mathrm{Im}\zeta_j = M^{-j}\mathrm{Im}\zeta_0$, 从而存在子列$\{\zeta_{n_j}\}_j$使得$\lim_{j\to\infty} \zeta_{n_j} = \eta$。再由$\widehat{f}(\zeta_j + 2\pi k) = 0$取极限得到$\widehat{f}(\eta + 2\pi k) = 0$ 对所有整数k成立。因此, f没有稳定的整平移, 这与假设矛盾。 □

综合定理2.4.1和定理2.6.2, 我们得到下面的关于细分分布的线性无关性特征。

推论 2.6.1 **设f是紧支撑的细分分布, 它的符号函数$H(\xi)$是一个三角多项式。那么f的整平移是线性无关的充分必要条件是: 不存在两个三角多项式$H_1(\xi)$和$H_2(\xi)$, 使得$H_1(0) \neq 0$, $H_1(\xi)$不为单项式且$H(\xi) = \frac{H_1(M\xi)}{H_1(\xi)} H_2(\xi)$。**

对任一紧支撑的函数f, 我们可以把f写成某个有线性无关整平移的紧支撑函数g的有限线性组合, 即$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} d(j) g(\cdot - j)$且$\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$为有限长序列。在$f$又是细分函数时, 上述的函数$g$也可取为细分函数。

定理 2.6.3 设 f 是紧支撑的细分分布, 它的符号函数 $H(\xi)$ 是一个三角多项式。那么, 存在一个线性无关的紧支撑细分分布 g 和一个有限长序列 $\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 使得

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}} d(j)g(\cdot-j)\text{。} \tag{2.6.3}$$

证明: 在 f 本身具有线性无关的整平移时, 我们只需取 $g=f$ 即可。否则, 由推论2.6.1, 存在两个三角多项式 $H_1(\xi)$ 和 $H_2(\xi)$ 使得 $H_1(0)\neq 0$ 和

$$H(\xi)=\frac{H_1(M\xi)}{H_1(\xi)}H_2(\xi)\text{。} \tag{2.6.4}$$

不妨认为 $H_1(0)=1$ 和 $H_2(\xi)$ 不再具有 $H_1(M\xi)/H_1(\xi)$ 形式的因子。那么由推论2.6.1 知, 由符号 $H_2(\xi)$ 作对应的细分函数是紧支撑的和有线性无关的整平移。我们记此细分函数为 g。注意到

$$\widehat{f}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty} H(\xi/M^j) \quad \text{和} \quad \widehat{g}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty} H_2(\xi/M^j),$$

从而由 (2.6.4) 知

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{H_1(M^{j-1}\xi)}{H_1(M^j\xi)}H_2(M^{-j}\xi)\\ &= H_1(\xi)\prod_{j=1}^{\infty}H_2(M^{-j}\xi)=H_1(\xi)\widehat{g}(\xi)\text{。}\end{aligned}$$

由此, 表达式 (2.6.3) 在取 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} d(j)d^{-ij\xi}=H_1(\xi)$ 时成立。 □

2.7 局部线性无关性

记 f 是一个紧支撑分布。对任意的开集 A, 记

$$N_f(A) = \left\{k \in \mathbb{Z} : f(\cdot - k) \text{ 在 } A \text{ 上不恒为零}\right\} \text{。}$$

对任意开集 A, 如果在 A 上满足 $\sum_{k \in N_f(A)} d(k) f(\cdot - k)$恒为零的序列 $\{d(k)\}_{k \in N_f(A)}$ 只有零序列时, 我们称 f 有局部线性无关的整平移或简称为局部线性无关的。从局部线性无关性的定义看到, 一个紧支撑分布在有局部线性无关的整平移时, 一定具有线性无关的整平移。反之, 对于一个有整平移线性无关的紧支撑分布 f, 我们能找到一个开集 A, 使得满足 $\sum_{k \in N_f(A)} d(k) f(\cdot - k)$ 在 A 上恒为零的序列只有零序列 (参见 [62])。

对细分分布 f, 当伸缩因子 $M = 2$ 时, 我们有下面的等价关系。

定理 2.7.1 **设 f 是一个紧支撑分布且满足下列细分方程**

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c(j) f(2 \cdot - j) \text{。} \tag{2.7.1}$$

又假设序列 $\{c(j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的长度有限且满足 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c(j) = 2$。那么, f 整平移的局部线性无关性和整体线性无关性等价。

由于局部线性无关性和整体线性无关性在平移下不变, 所以在下面的证明过程中, 不妨认为 (2.7.1) 中的序列 $\{c(n)\}$ 满足: $c(0)c(N) \neq 0$, 并且当 $j < 0$ 或 $j > N$ 时, 成立 $c(j) = 0$。不妨认定 $N \geq 1$, 否则 $c(0) = 2$, 此时 f 是 Delta 分布, 从而在此情况下, f 既是整体线性无关, 也是局部线性无关的。定义

$$B_\epsilon = \left(c(2i - j + \epsilon)\right)_{0 \leq i,j \leq N-1}, \qquad \epsilon = 0, 1 \text{。} \tag{2.7.2}$$

引理 2.7.1 设序列$\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$的长度有限。不妨假设$c(0)c(N) \neq 0$以及$c(j) = 0$对所有$j < 0$和$j > N$成立。进一步假设$H(z) = \sum_{j=0}^{N} c(j)z^j$没有对称根，即不存在复数$z_0 \neq 0$，使得$H(-z_0) = H(z_0) = 0$。那么，(2.7.2)所定义的$N \times N$矩阵$B_0$和$B_1$是非奇异的。

证明： 记$B = (c(2i-j))_{1\le i,j\le N-1}$。注意到$c(0)c(N) \neq 0$以及$B_0$的第一行为$(c(0), 0, \cdots, 0)$和$B_1$的最后一行为$(0, \cdots 0, c(N))$。因此，$B_0$和$B_1$的非奇异性与矩阵$B$的非奇异性等价。记$H_e(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c(2i)z^i$和$H_o(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c(2i+1)z^i$，但这里我们总认为$c(i)$在$i < 0$或$i > N$时取零值。对$\mathbb{C}^{N-1}$中的向量$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1})$，定义$\alpha_e(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha(2i)z^i$和$\alpha_o(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha(2i+1)z^i$，同样我们在此规定$\alpha(i)$，当$i < 0$或$i > N$时为零。

现在我们利用反证法证明B的非奇异性。反之，存在一个非零向量$\alpha = (\alpha(1), \cdots, \alpha(N-1))^T$使得$B\alpha = 0$。从而

$$(1, z, \cdots, z^{N-2})B\alpha = 0\text{。} \tag{2.7.3}$$

容易验证(2.7.3)式又可以改写成

$$\alpha_o(z)H_o(z) + z^{-1}\alpha_e(z)H_e(z) = 0\text{。}$$

由假设条件$H(z)$无对称根以及$H(z) = H_e(z^2) + zH_o(z^2)$知：多项式$H_o(z)$和$H_e(z)$没有公共零点。由此，存在多项式$Q(z)$使得

$$\alpha_o(z) = -H_e(z)Q(z) \quad \text{和} \quad z^{-1}\alpha_e(z) = H_o(z)Q(z)\text{。} \tag{2.7.4}$$

当N是奇数时，由于$\alpha_e(z)z^{-1}$的次数至多为$(N-3)/2$，而多项式$H_o(z)$的次数为$(N-1)/2$，从而$Q(z) = 0$，这与α是非零

向量矛盾。

当 N 是偶数时, 多项式 $H_e(z)$ 的次数为 $N/2$, 而 $\alpha_o(z)$ 的次数至多为 $(N-2)/2$, 因此 $Q(z)=0$。从而 $\alpha_o(z)=\alpha_e(z)=0$, 这与 $\alpha\neq 0$ 矛盾。 $\square$

引理 2.7.2 **设序列** $\{c(j)\}_{j=0}^N$ **和矩阵** B_0, B_1 **如引理**2.7.1 **中所定义。又设** $H(z)=\sum_{j=0}^N c(j)z^j$ **没有对称零点。如果线性子空间** $V\subset\mathbb{C}^N$ **满足**

$$B_0V=B_1V=V, \tag{2.7.5}$$

那么 $V=\{0\}$ **或** $\mathbb{C}^N$, **或存在非零复数** z_0 **使得**

$$(1,z_0,\cdots,z_0^{N-1})\nu=0\,,\quad \text{对所有 } \nu\in V \text{ 成立。}$$

证明: 不妨认为 $V\neq\{0\}$ 和 $\mathbb{C}^N$。设 $e_i=(e_{i1},\cdots,e_{iN})^T, 1\leq i\leq m<N$ 为 V 的一组基。记 $E_i(z)=\sum_{j=1}^N e_{ij}z^j, E_{ie}(z)=(E_i(z^{1/2})+E_i(-z^{1/2}))/2$, 以及 $E_{io}(z)=(E_i(z^{1/2})-E_i(-z^{1/2}))/(2z^{1/2})$。由假设 (2.7.5) 知, 存在非奇异矩阵 $B_m^\epsilon=\left(\lambda_{ij}^\epsilon\right)_{1\leq i,j\leq m}$, 使得

$$B_\epsilon e_i=\sum_{j=1}^m\lambda_{ij}^\epsilon e_j,\qquad \epsilon=0,1\quad \text{和}\quad i=1,\cdots,m\,。 \tag{2.7.6}$$

记

$$H_e(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(2j)z^j\quad \text{和}\quad H_o(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(2j+1)z^j,$$

同样这里我们仍约定: 当 $j<0$ 或 $j>N$ 时 $c(j)=0$。在等式 (2.7.6) 的两边同乘 $(1,z,\cdots,z^{N-1})$, 后我们得到

$$\begin{cases} H_e(z)E_{io}(z) + H_o(z)E_{ie}(z) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^0 E_j(z)\,, \\ H_o(z)E_{io}(z) + z^{-1}H_e(z)E_{ie}(z) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^1 E_j(z)\,。 \end{cases} \tag{2.7.7}$$

记 $E(z) = (E_1(z), \cdots, E_m(z))^T$, $E_e(z) = (E(z^{1/2}) + E(-z^{1/2}))/2$ 和 $E_o(z) = \dfrac{E(z^{1/2}) - E(-z^{1/2})}{2z^{1/2}}$。那么, 我们可以把 (2.7.7) 写成下面的矩阵形式:

$$\begin{cases} H_e(z)E_o(z) + H_o(z)E_e(z) = B_m^0 E(z)\,, \\ z^{-1}H_e(z)E_e(z) + H_o(z)E_o(z) = B_m^1 E(z)\,。 \end{cases} \tag{2.7.8}$$

记 $C = B_m^0 \left(B_m^1\right)^{-1}$。那么, 由 (2.7.8) 得到

$$H_e(z)\left(z^{-1}CE_e(z) - E_o(z)\right) + H_o(z)\left(CE_o(z) - E_e(z)\right) = 0\,。 \tag{2.7.9}$$

这证明了存在多项式向量 $P(z) = (p_1(z), \cdots, p_m(z))^T$, 使得

$$\begin{cases} z^{-1}CE_e(z) - E_o(z) = H_o(z)P(z)\,, \\ CE_o(z) - E_e(z) = -H_e(z)P(z)\,。 \end{cases} \tag{2.7.10}$$

由 $E_e(z), E_o(z)$ 的构造可知: $E_e(z)$ 和 $E_o(z)$ 的每个分量的次数分别不超过 $(N-1)/2$ 和 $N/2$ 的整数部分。当 N 为奇数时, $H_o(z)$ 的次数为 $(N-1)/2$; 而当 N 为偶数时, $H_e(z)$ 的次数为 $N/2$。这样, 比较了 (2.7.10) 两边多项式的次数后得知, $P(z)$ 是一个常值向量, 不妨就记为 α。令 I_m 为 $m \times m$ 单位矩阵。解线性方程 (2.7.10), 我们得到

$$\begin{cases} \left(z^{-1}C^2 - I_m\right)E_e(z) = C\alpha H_o(z) - \alpha H_e(z)\,, \\ \left(z^{-1}C^2 - I_m\right)E_o(z) = -C\alpha z^{-1}H_e(z) + \alpha H_o(z)\,。 \end{cases} \tag{2.7.11}$$

将 (2.7.11) 代入 (2.7.8),

$$\left(z^{-1}C^2 - I_m\right) B_m^0 E(z) = C\alpha \left(-z^{-1}(H_e(z))^2 + (H_o(z))^2\right),$$

即

$$\left(C^2 - zI_m\right) B_m^0 E(z) = C\alpha \left(-(H_e(z))^2 + z(H_o(z))^2\right) 。$$

在上式两边乘 $\left(C^2 - zI_m\right)$ 的伴随矩阵 $\left(C^2 - zI_m\right)^*$ 后得到

$$\begin{aligned}
&\det\left(C^2 - zI_m\right) B_m^0 E(z) \\
&= \left(z\left(H_o(z)\right)^2 - \left(H_e(z)\right)^2\right) \left(C^2 - zI_m\right)^* C\alpha。
\end{aligned}$$

由于 $c(0)c(N) \neq 0$ 以及 $z(H_o(z))^2 - (H_e(z))^2$ 是一个次数为 N 的多项式, 因此 $z(H_o(z))^2 - (H_e(z))^2$ 恰有 N 个根 (包括重数)。另一方面, $\det(C^2 - zI_m)$ 至多只有 m 个特征根 (包括重数)。因此, 从 $m \leq N-1$知存在复数 z_0 使得 $E(z_0) = 0$。即 $(1, z_0, \cdots, z_0^{N-1})\nu = 0$ 对所有 $\nu \in V$ 成立。 □

引理 2.7.3 设紧支撑的细分分布 f 满足细分方程

$$f = \sum_{j=0}^{N} c(j) f(2 \cdot -j) \quad \text{和} \quad \widehat{f}(0) = 1,$$

其中 $N \geq 1$, $c(0)c(N) \neq 0$ 和 $\sum_{j=0}^{N} c(j) = 2$。如果存在非零复数z_0, 使得分布 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j f(\cdot - j)$ 支于 $\mathbb{Z}$。那么, 存在另一个非零复数 z_0' 使得 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} {z_0'}^j f(\cdot - j) \equiv 0$。

证明: 记 $F = \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j f(\cdot - j)$。则 $\operatorname{supp} F \subset \mathbb{Z}$, 并且 $F(\cdot - 1) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j f(\cdot - j - 1) = z_0^{-1} F(\cdot)$。从而存在非负整数 k 和复

系数 $a_s, 0 \le s \le k$, 使得

$$F = \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j \left(\sum_{s=0}^{k} a_s \delta^s(\cdot - j)\right), \tag{2.7.12}$$

这里 δ^s 表示 s 阶 Delta 函数。不妨认为 $a_0 a_k \neq 0$, 否则取 $z_0' = z_0$ 就是我们所需找的复数。

记 $z_0 = \mathrm{e}^{\theta}$ 以及 $R(x) = \sum_{s=0}^{k} a_s x^s$, 对 (2.7.12) 式两边分别取 Fourier 变换, 我们得到

$$\widehat{f}(\theta + 2\pi k) = R(\theta + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}\,。 \tag{2.7.13}$$

记 $H(\xi) = \dfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{N} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 由 f 满足的细分方程知 $\widehat{f}$ 满足下列方程

$$\widehat{f}(2\xi) = H(\xi)\widehat{f}(\xi)\,。 \tag{2.7.14}$$

从而

$$\widehat{f}(\theta+2^m k\pi) = \prod_{j=1}^{m-1} H(2^{-j}\theta)\widehat{f}(2^{-m+1}\theta+2k\pi)\,, \quad \forall\, m \ge 1\,, k \in \mathbb{Z}\,。 \tag{2.7.15}$$

在 (2.7.15) 的两边关于 m 取极限并利用 (2.7.13) 可知, R是一个零次多项式,

$$\widehat{f}(\theta)\widehat{f}(2k\pi) = a_0 \neq 0, \tag{2.7.16}$$

以及

$$\widehat{f}(2k\pi) = \widehat{f}(0), \qquad k \in \mathbb{Z}\,。$$

由 (2.7.14) 并利用 $\widehat{f}$ 的连续性,

$$\widehat{f}(y) = \widehat{f}(y + 2\pi)\,, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,。$$

这说明 $\widehat{f}$ 是一个 2π 周期函数。从而 f 是一个支于 $\{0,1,\cdots,N\}$ 的分布, 即

$$f=\sum_{k=0}^{N} d(k)\delta(\cdot-k)\ 。$$

由于 $c(0)c(N)\neq 0$, 因此 $d(0)d(N)\neq 0$。由代数基本定理和 $N\geq 1$, 存在非零复数 z_0', 使得 $\sum_{k=0}^{N} d(k)\left(z_0'\right)^{-k}=0$。那么

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(z_0'\right)^{j} f(\cdot-j) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\left(z_0'\right)^{j}\delta(\cdot-k-j)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\left(z_0'\right)^{j-k}\delta(\cdot-j)=0\ 。
\end{aligned}$$

这证明了 z_0' 就是我们要找的非零复数。 □

现在我们可以开始证明定理2.7.1 。

定理2.7.1 的证明: 显然我们只需证明: f 的整体线性无关性蕴涵它的局部线性无关性。由于整体和局部线性无关性在平移下不变。不妨认为 (2.7.1) 中的序列 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足 $c(0)c(N)\neq 0$, 并且 $c(j)=0$ 对所有 $j<0$ 与 $j>N$ 成立。由于当 $N=0$时, f 就是 Delta 分布, 而它同时具有局部和整体线性无关性, 因此下面我们总假定 $N\geq 1$。

设 A 为 $(0,1)$ 上的任何非空开集。由局部线性无关性的定义我们只需证明

$$W_A=\left\{(d(0),\cdots,d(N-1))^T:\sum_{k=0}^{N-1} d(k)f(\cdot+k)\text{ 在 } A \text{ 上恒为零}\right\}$$

是一个零空间。由于 A 非空, 那么存在整数 k 和 $\epsilon_i\in\{0,1\}$, $i=0,1,\cdots k$, 使得 $\sum_{i=0}^{k}\epsilon_i 2^{-i-1}+2^{-k-1}(0,1)\subset A$。记

$$F = (f(\cdot), f(\cdot+1), \cdots, f(\cdot+N-1))^T 。$$

由细分方程 (2.7.1) 知, 对 $\epsilon = 0, 1$,

$$B_\epsilon F = F\left(\frac{\cdot+\epsilon}{2}\right) \tag{2.7.17}$$

在 $(0,1)$ 上成立。因此我们可写 W_A 为

$$W_A = \left\{ \ d = (d(0), \cdots, d(N-1))^T : \quad d^T F \text{ 在 } A \text{ 上恒为零} \right\} \ 。 \tag{2.7.18}$$

综合 (2.7.17) 和 (2.7.18), 我们得到

$$W_{(0,1)} \subset W_A \subset B_{\epsilon_k}^T \cdots B_{\epsilon_1}^T W_{(0,1)} 。 \tag{2.7.19}$$

由引理2.7.1 知道: $B_\epsilon, \epsilon = 0, 1$, 是非奇异矩阵。再与 (2.7.19) 结合起来, 我们不难得到

$$W_A = W_{(0,1)} 。$$

从而我们只需证明 $W_{(0,1)} = \{0\}$。

定义

$$V = \Big\{ \ (\nu(0), \cdots, \nu(N-1))^T : \quad \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} \nu(i) d(i) = 0 \,, \\ \text{对所有 } (d(0), \cdots, d(N-1))^T \in W_{(0,1)} \text{ 成立} \Big\} \ 。$$

由 $B_0^T W_{(0,1)} = B_1^T W_{(0,1)} = W_{(0,1)}$, 知 $B_0 V = B_1 V = V$。因此由引理2.7.2, $V = \{0\}$ 或存在非零复数 z_0, 使得 $(1, z_0, \cdots, z_0^{N-1})$ 垂直于 V 或 $V = \mathbb{C}^N$, 也就是 $W_{(0,1)}$ 是 $\{0\}$ 或存在 $(1, z_0, \cdots, z_0^{N-1})$

$\in W_{(0,1)}$ 或 $W_{(0,1)} = \mathbb{C}^N$。当 $W_{(0,1)} = \{0\}$ 时, 我们就得到 f 的局部线性无关性。当 $W_{(0,1)} \neq \{0\}$ 时, $(1, z_0, \cdots, z_0^{N-1}) \in W_{(0,1)}$ 对某个复数 z_0 成立。由 $W_{(0,1)}$ 的定义知, 在 $(0,1)$ 上 $\sum_{j=0}^{N-1} z_0^j f(\cdot + j) = 0$ 成立, 从而广义函数 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j f(\cdot + j)$ 支撑于 $\mathbb{Z}$。由引理2.7.3, 存在非零复数 z_0' 使得 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} {z_0'}^j f(\cdot + j) \equiv 0$, 这与 f 的整体性无关性矛盾。 $\square$

在本节的最后, 我们必须指出: 虽然伸缩因子为 2 的细分函数的局部和整体线性无关性等价。但在伸缩因子大于 2 时等价性就不再成立。如下面的伸缩因子为 3 的细分方程

$$f_\lambda(\cdot) = \lambda\big(f_\lambda(3\cdot) + f_\lambda(3\cdot -1)\big) + f_\lambda(3\cdot -2) + (1-\lambda)\big(f_\lambda(3\cdot -3)$$

$$+ f_\lambda(3\cdot -4)\big), \qquad 0 < \lambda < 1,$$

满足 $\widehat{f}_\lambda(0) = 1$ 的缓增分布解就是这样的例子。事实上, $(\lambda - 1)f_\lambda(\cdot) + \lambda f_\lambda(\cdot + 1)$ 在 $(1/3, 2/3)$ 上恒为零 (参见 [19])。

2.8 Strang-Fix 条件

设 f 为一个紧支撑分布, k 为非负整数。如果

$$\widehat{f}(0) \neq 0 \quad 和 \quad \widehat{f}^{(j)}(2\pi n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ 和 } 0 \le j \le k-1 \tag{2.8.1}$$

成立, 我们就称 f 满足 k 阶 Strang-Fix 条件。

由 Poisson 积分公式知, 一个紧支撑分布 f 满足 k 阶 Strang-Fix 条件的充分必要条件是: 对任意次数不超过 $k-1$ 次的多项

式 P, 存在另一个次数不超过 $k-1$ 的多项式 Q, 使得

$$P(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q(k)f(\cdot-k)\text{。} \tag{2.8.2}$$

对紧支撑的细分函数, 它满足的 Strang-Fix 条件可以用所对应的符号函数来刻画。

定理 2.8.1 设 f 是一个紧支撑细分分布, 它所对应的符号 H 是一个三角多项式。如果符号 $H(\xi)$ 可以写成下面形式

$$H(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}\right)^k\widetilde{H}(\xi), \tag{2.8.3}$$

其中 $k\geq 1$, $\widetilde{H}(\xi)$ 为三角多项式。那么, f 满足 k 阶 Strang-Fix 条件。反之, 如果 f 满足 k 阶 Strang-Fix 条件且有稳定的整平移, 那么所对应的符号 $H(\xi)$ 有形如 (2.8.3) 的分解。

证明：设 $H(\xi)$ 为细分分布 f 所对应的符号。则

$$\widehat{f}(M\xi)=H(\xi)\widehat{f}(\xi)\text{。} \tag{2.8.4}$$

由 (2.8.3), 我们有:

$$H^{(j)}(2s\pi/M)=0\,,\qquad \forall\, s=1,2,\cdots,M-1,\quad 0\leq j\leq k-1\text{。} \tag{2.8.5}$$

设 $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$。如果存在 $n_1\in\{1,2,\cdots,M-1\}$ 和 $0\leq n_2\in\mathbb{Z}$, 使得 $n=n_1M^{n_2}$ 或 $n=-n_1M^{n_2}$。利用 (2.8.4) 我们得到:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(2\pi n+\xi)\quad&=\quad\left(\prod_{j=1}^{n_2}H(M^{-j}\xi)\right)H\left(M^{-n_2-1}\xi\pm\frac{2\pi n_1}{M}\right)\\&\quad\times\widehat{f}\left(M^{-n_2-1}\xi\pm\frac{2\pi n_1}{M}\right)\text{。}\end{aligned} \tag{2.8.6}$$

否则, 存在 $n_1 \in \{1,2,\cdots,M-1\}$, $0 \le n_2 \in \mathbb{Z}$ 以及 $l \in \mathbb{Z}$, 使得 $n = M^{n_2}(lM+n_1)$。利用 (2.8.4) 我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{f}(2\pi n+\xi) &= \left(\prod_{j=1}^{n_2} H(M^{-j}\xi)\right) H\left(M^{-n_2-1}\xi + \frac{2\pi n_1}{M}\right) \\ &\quad \times \widehat{f}\left(M^{-n_2-1}\xi + \frac{2\pi n_1}{M} + 2l\pi\right) 。\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

综合 (2.8.5), (2.8.6) 和 (2.8.7) 可得

$$\widehat{f}^{(j)}(2\pi n) = 0, \qquad \forall\, 0 \le j \le k-1,\ n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} 。$$

这就证明了 f 满足 k 阶 Strang-Fix 条件。

现证明结论的第二部分。假设 f 满足 k 阶 Strang-Fix 条件和有稳定的整平移。由定理2.4.1, 对 $s = 1,2,\cdots,M-1$, 存在 $k(s) \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widehat{f}(2\pi s/M + 2k(s)\pi) \ne 0$。由 (2.8.4) 知

$$\widehat{f}(2\pi s+2Mk(s)\pi+M\xi) = H\left(\frac{2\pi s}{M}+\xi\right)\widehat{f}\left(\frac{2\pi s}{M}+2k(s)\pi+\xi\right) 。 \tag{2.8.8}$$

结合 f 的 Strang-Fix 条件我们得到

$$H^{(j)}\left(\frac{2s\pi}{M}\right) = 0, \qquad 0 \le j \le k-1 。$$

从而 $\widetilde{H}(\xi) = H(\xi)\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}\right)^{-k}$ 仍是一个解析函数。另一方面, $H(\xi)$ 为三角多项式, 从而 $\widetilde{H}(\xi)$ 也为三角多项式。这证明了 $H(\xi)$ 有形如 (2.8.3) 的分解。 □

定理 2.8.2 **设** f **是一个紧支撑的细分函数且有稳定的整平移。如果** $\widehat{f}(0) = 1$ **以及** $f^{(j)} \in L^1, 0 \le j \le k-1$。**那么,** f **满足** k **阶** Strang-Fix **条件。**

证明：由定理1.2.1 和假设 $f^{(j)} \in L^1, 0 \le j \le k-1$, 知

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^{-k+1}\widehat{f}(\xi) = 0 \text{。} \tag{2.8.9}$$

设 f 所对应的滤波器为 $H(\xi)$, 那么 $\widehat{f}(\xi) = H(M^{-1}\xi)\widehat{f}(M^{-1}\xi)$。设 n 为任一非零整数。那么, 对 $1 \le m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(2M^m n\pi + \xi) &= H(M^{-1}\xi)\cdots H(M^{-m}\xi)\widehat{f}(2n\pi + M^{-m}\xi) \\ &= \frac{\widehat{f}(\xi)}{\widehat{f}(M^{-m}\xi)}\widehat{f}(2n\pi + M^{-m}\xi) \text{。} \end{aligned} \tag{2.8.10}$$

因此, 由 (2.8.9), (2.8.10) 可知: 序列 $\widehat{f}(2n\pi + M^{-m}\xi)M^{m(k-1)}$, $m \ge 1$, 在原点一个领域内一致收敛于 0。由于 $\widehat{f}$ 为解析函数, 从而

$$\widehat{f}^{(j)}(2\pi n) = 0, \qquad \forall\, 0 \le j \le k-1, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{。}$$

这证明了 f 满足 k 阶 Strang-Fix条件。 □

2.9 级联序列的收敛性

设 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个有限长的序列且满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) = M$。定义 L^p_*, $1 \le p \le \infty$, 上的映射 T_c:

$$T_c f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(M\cdot - j)\,, \tag{2.9.1}$$

在此 L^p_* 如 § 2.3 节中所陈述。不难看到, T_c 是一个 L^p_* 上的有界算子, 而 T_c 的不动点就是一个细分函数。

任取一个紧支撑的 L^p_* 函数 f_0, 定义

$$f_n = T_c f_{n-1}, \qquad n \ge 1 \text{。} \tag{2.9.2}$$

那么, 函数序列 $\{f_n\}_{n\geq 0}$ 被称为级联序列 (Cascade Sequence)。本节的主要内容是考虑 $\{f_n\}$的收敛性。

定义 $H(\xi) = M^{-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。那么, 在 (2.9.1) 两边取 Fourier 变换可得

$$(T_c f)^\wedge(\xi) = H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M), \tag{2.9.3}$$

从而

$$\widehat{f}_n(\xi) = \prod_{j=1}^{n} H(M^{-j}\xi)\widehat{f}_0(M^{-n}\xi)\text{。} \tag{2.9.4}$$

由引理2.1.1 知, $\prod_{j=1}^n H(M^{-j}\xi)$ 在任何紧集上一致收敛。设 f 是细分方程

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(M\cdot -j), \qquad \widehat{f}(0) = 1$$

的惟一分布解。那么, $\widehat{f}_n$ 在分布意义下收敛于 $\widehat{f}_0(0)\widehat{f}$。

在实际应用中, 我们更关心 $\{f_n\}$在 L_*^p, $1\leq p\leq\infty$, 上的收敛性, 特别是 L_*^∞ 上的收敛性。这是因为 L^∞ 收敛性将帮助我们描绘细分函数的图象。在数值分析中, 我们更进一步需要级联序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 Sobolev 空间上的收敛性。在本节中我们将只关心级联序列在 L_*^p 中的收敛性问题。有兴趣研究级联序列在其它函数空间上收敛性的读者可参考 [66, 67]和所引用的文献。

设 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为一个有限长序列且满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) = M$, 对任意 $\lambda = (\lambda(j))_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^p$, 定义 ℓ^p 上的算子 S_c 在 λ 上的作用为

$$\left(S_c\lambda\right)(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(k-Mj)\lambda(j)\,,\ k\in\mathbb{Z}, \quad \lambda = (\lambda(j))_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^p\text{。} \tag{2.9.5}$$

算子 S_c 通常被称为细分算子 (Subdivision operator)。记 $\delta = (\delta(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ 为 Delta 序列, 通过计算不难验证

$$f_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (S^n\delta)(j) f_0(M^n \cdot -j)\,。 \tag{2.9.6}$$

现在我们来看一下级联序列在 L^p 中收敛的一个必要条件。

定理 2.9.1 **设** $1 \le p \le \infty, f_0$ **是一个紧支撑的** L_*^p **函数且满足** $\widehat{f}_0(0) = 1$。**又设** $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ **是一个有限长序列并满足** $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) = M$, **序列** $\{f_n\}_{n\ge 0}$ **如** (2.9.2) **所定义。如果** $\{f_n\}_{n\ge 0}$ **在** L_*^p **意义下收敛, 那么** f_0 **满足一阶** Strang-Fix **条件。**

证明: 记 g 为级联序列 $\{f_n\}_{n\ge 0}$ 在 L_*^p 意义下的极限。那么, g 是一个紧支撑的 L_*^p 函数。由黎曼引理 (定理1.2.1)

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{g}(\xi) = 0\,。 \tag{2.9.7}$$

由于序列 $\{f_n\}$ 在 L_*^p 意义下收敛, 又容易验证 $\{f_n\}$ 可支撑于一个固定的紧集, 因此 f_n 也就在 L^1 意义下收敛于 g。从而由定理1.2.1,

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{g}\|_\infty = 0\,。 \tag{2.9.8}$$

综合 (2.9.7) 和 (2.9.8), 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n(2M^n k\pi) = 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,。$$

由 (2.9.4) 和 $H(0) = 1$, 我们知道 $\widehat{f}_n(2M^n k\pi) = \widehat{f}_0(2k\pi)$。将此式代入上式, 我们得到

$$\widehat{f}_0(2k\pi) = 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,。$$

这也就证明了 f_0 满足一阶 Strang-Fix 条件。 $\square$

当 $f_n, n \geq 0$, 在 L^p 意义下收敛时, 它的极限函数 g 为 L_*^p 细分函数且有紧支撑。由定理2.6.3, 极限函数 g 可以写成某个具有线性无关整平移的紧支撑细分函数的整平移的有限线性组合。注意到函数的 L_*^p 可积性在整平移的有限线性组合下是不变的, 这说明 g 可以由一个具有线性无关整平移的紧支撑 L_*^p 细分函数, 经过整平移有限线性组合得到。根据定理2.8.1, g 的符号 $H(\xi) = M^{-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 可写成

$$H(\xi) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\widetilde{H}(\xi) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\left(\frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} b(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\right)。$$

定理 2.9.2 **设** $1 \leq p < \infty, f_0$ **是一个紧支撑的** L_*^p **函数并满足一阶** Strang-Fix **条件, 又设** $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ **是一个有限长序列且满足** $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) = M$ **和**

$$H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\widetilde{H}(\xi)。$$

设级联序列 $f_n, n \geq 0$, **如** (2.9.2) **所述。如果** f_0 **有稳定的整平移并且** f_n **在** L_*^p **意义下收敛, 那么**

$$\lim_{n\to\infty} M^{-n/p}\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p} = 0。$$

证明: 记 $M^n H(\xi)\cdots H(M^{n-1}\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。我们可以归纳地证明

$$f_n(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j) f_0(M^n x - j)。$$

因此,

$$f_n(x)-f_n(x-M^{-n})=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(a_n(j)-a_n(j-1))f_0(M^nx-j)\text{。}$$

由 f_0 的稳定整平移假设知, 存在与 n 无关正常数 C 使得

$$\|\{a_n(j)-a_n(j-1)\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^p}\le CM^{n/p}\|f_n-f_n(\cdot-M^{-n})\|_p\text{。} \tag{2.9.9}$$

结合 f_n 在 L^p_* 上的收敛性和空间 L^p_* 中任意函数 f 的性质

$$\lim_{t\to 0}\|f(\cdot)-f(\cdot+t)\|_p=0\,,\quad 1\le p\le\infty$$

我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(\cdot)-f_n(\cdot-M^{-n})\|_p=0\text{。} \tag{2.9.10}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{Z}}(a_n(j)-a_n(j-1))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\\ &\quad=\quad(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})M^nH(\xi)\cdots H(M^{n-1}\xi)\\ &\quad=\quad(1-e^{-iM^n\xi})\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\text{。}\end{aligned}$$

不难验证, $\widetilde{H}(\xi),\cdots,\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)$ 的次数不超过 CM^n, 且 C 是一个与 n 无关的常数。因此存在与 n 无关的常数 C_1 成立下式

$$C_1\Big\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}(a_n(j)-a_n(j-1))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\Big\|_{F\ell^p}\ge\big\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\big\|_{F\ell^p}\text{。} \tag{2.9.11}$$

至此, 综合 (2.9.9), (2.9.10) 和 (2.9.11) 就证明了

$$\lim_{n\to\infty}M^{-n/p}\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p}=0\text{。}\qquad\square$$

在本节的最后，我们来讨论级联序列 L_*^p 收敛的一个充分条件，此条件在初始值具有稳定性时也是必要的 (见定理2.9.2)。

定理 2.9.3 设 $1 \le p \le \infty, f_0$ 是一个紧支撑的 L_*^p 函数且满足一阶 Strang-Fix 条件。又设 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个有限长序列，且满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) = M$ 和

$$H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M - M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\widetilde{H}(\xi)\,。$$

设级联序列 $f_n, n \ge 0$ 如 (2.9.2) 所述。如果

$$\lim_{n\to\infty} M^{-n/p}\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\|_{F\ell^p} = 0\,,$$

那么 f_n 在 L_*^p 意义下收敛。

证明:由定理2.3.1 知，以 H 为符号的细分函数 f 是 L_*^p 函数。又由定理2.8.1,

$$\widehat{f}(2k\pi) = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,。$$

记 $F_0 = f_0 - \widehat{f_0}(0)f$。由 Poisson 求和公式得到

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} F_0(\cdot - j) = 0\,。\tag{2.9.12}$$

设

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} = M^n H(\xi)H(M\xi)\cdots H(M^{n-1}\xi) \tag{2.9.13}$$

并记 $f_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j) f_0(M^n\cdot - j)$。由 (2.9.12) 式得到,

$$\begin{aligned}(f_n - \widehat{f}_0(0)f)(x) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j)F_0(M^n x - j)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a_n(j) - a_n([M^n x]))F_0(M^n x - j)\,,\end{aligned}$$

这里 $[M^n x]$ 如通常那样表示 $M^n x$ 的整数部分。取正数 N 使得 F_0 支撑于 $[-N+1, N-1]$。当 $p=\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\left\|\left(f_n - \widehat{f}_0(0)f\right)\right\|_\infty\\ &\leq \sup_x \sum_{|j-M^n x|\leq N} |a_n(j) - a_n([M^n x])| \times \|F_0\|_\infty\\ &\leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{|l|\leq N} |a_n(l+j) - a_n(j)| \times \|F_0\|_\infty\,。\end{aligned} \tag{2.9.14}$$

当 $1\leq p<\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\left\|\left(f_n - \widehat{f}_0(0)f\right)\right\|_p^p\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{M^{-n}l}^{M^{-n}(l+1)} \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_n(j) - a_n(l)| \times |F_0(M^n x - j)|\right|^p \mathrm{d}x\\ &\leq C\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_n(j) - a_n(l)|^p \int_{M^{-n}l}^{M^{-n}(l+1)} |F_0(M^n x - j)|^p\,\mathrm{d}x\\ &\leq C' M^{-n} \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{|l|\leq N} |a_n(j) - a_n(j+l)|^p\,,\end{aligned} \tag{2.9.15}$$

在此我们已利用了 F_0 是紧支撑 $L^p(\mathbb{R})$ 函数的事实来得到最后两个不等式。综合 (2.9.14) 和 (2.9.15), 我们有

$$\left\|f_n - \widehat{f}_0(0)f\right\|_p \leq CM^{-n/p} \sum_{|l|\leq N} \left\|\{a_n(j) - a_n(j+l)\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^p}\,。 \tag{2.9.16}$$

根据 (2.9.13) 以及 $H(\xi)$ 的分解形式

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} - \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_n(j+l)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} \\
&\quad = \left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}\right) M^n H(\xi)\cdots H(M^{n-1}\xi) \\
&\quad = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}} \left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}\right) \widetilde{H}(\xi)\cdots \widetilde{H}(M^{n-1}\xi) \text{。}
\end{aligned}$$

因此, 存在一个常数 C_l 使得下列估计成立,

$$\left\|\{a_n(j)-a_n(j+l)\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^p} \le C_l \left\|\widetilde{H}(\xi)\cdots\widetilde{H}(M^{n-1}\xi)\right\|_{F\ell^p} \text{。} \tag{2.9.17}$$

综合 (2.9.16) 和 (2.9.17), 就得到 f_n 在 L^p_* 意义下的收敛性。 □

2.10 对称性

众所周知, 实轴上的函数 f 可以分解为一个奇函数 f_o 与一个偶函数 f_e之和, 即 $f = f_o + f_e$。事实上, $f_e(x) = (f(x) + f(-x))/2$ 和 $f_o(x) = (f(x) - f(-x))/2$。从几何观点来看, 奇函数的图关于原点对称, 偶函数的图关于 y 轴对称。

设 $\epsilon = \pm 1$, f 是一个实函数。如果存在实数 λ 使得

$$f(\lambda + x) = \epsilon f(\lambda - x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.10.1}$$

我们就分别在 $\epsilon = 1$ 和 -1 时称 f 关于 $x = \lambda$ 对称和反对称。在信号分析中, 对称和反对称信号有着特别的意义, 它可以节省一半的信号储量和处理, 而且有相当的广泛性。

对一个细分函数 f 的对称和反对称性, 我们可以用它所对应

的滤波器 H 来刻画。设 f 是一个紧支撑且满足 $\widehat{f}(0) = 1$ 的细分分布, 又设三角多项式 H是它所对应的符号。那么

$$\widehat{f}(\xi) = H(\xi/M)\widehat{f}(\xi/M)\,。$$

这说明了 $\widehat{f}$ 和 H 有下面的关系:

$$\widehat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} H(M^{-j}\xi) \tag{2.10.2}$$

和

$$H(\xi) = \widehat{f}(M\xi)/\widehat{f}(\xi)\,。\tag{2.10.3}$$

在对 (2.10.1) 两边取 Fourier 变换后, 我们不难得到函数的对称性和反对称性在 Fourier 域的表示公式是

$$\widehat{f}(-\xi) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda\xi}\epsilon\widehat{f}(\xi)\,。\tag{2.10.4}$$

因此, 一个满足 $\widehat{f}(0) = 1$ 的紧支撑细分分布不可能是反对称的。综合 (2.10.2), (2.10.3) 和 (2.10.4), 我们得到下面的结论。

定理 2.10.1 **设紧支撑的细分分布** f **满足** $\widehat{f}(0) = 1$, **且所对应的滤波器** H **为三角多项式。那么,** f **关于** $x = \lambda$ **对称的充分必要条件是:** $H(-\xi) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda(M-1)\xi}H(\xi)$。**此外** $(M-1)\lambda$ **是一个整数。**

典型的对称细分函数是 $B-$样条 B_n,

$$B_0 = \chi_{[0,1]}, \qquad B_n(x) = \int_0^1 B_{n-1}(x-t)\mathrm{d}t, \quad n \geq 1\,,$$

和 sinc 函数,

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}\,。$$

定理 2.10.2 设紧支撑细分分布 f 有线性无关的整平移, $\{d(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个非零的有限长序列。如果 g 有下面的表达式

$$g=\sum_{j\in\mathbb{Z}}d(j)f(\cdot-j)\,。\tag{2.10.5}$$

记 $D(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}d(j)z^j$。那么, g 是对称或反对称的充分必要条件是: f 是对称的且 $D(z)$ 是对称或反对称的, 即存在某个整数 k 和 $\epsilon=\pm1$, 使得 $D(z^{-1})=\epsilon z^k D(z)$ 成立。

证明: 先证充分性。在 (2.10.5) 两边取 Fourier 变换后, 我们得到

$$\widehat{g}(\xi)=D(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})\widehat{f}(\xi)\,。\tag{2.10.6}$$

由 f 和 D 的对称性知, 存在 $\lambda\in\mathbb{R},k\in\mathbb{Z}$ 和 $\epsilon=\pm1$ 使得

$$\widehat{f}(-\xi)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\lambda\xi}\widehat{f}(\xi)\tag{2.10.7}$$

以及

$$D(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})=\epsilon\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}D(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})\,。\tag{2.10.8}$$

综合 (2.10.6), (2.10.7) 和 (2.10.8), 我们得到

$$\widehat{g}(-\xi)=\epsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\lambda-k)\xi}\widehat{g}(\xi)\,。$$

这就证明了 g 的对称或反对称性。

再证必要性。设 g 关于 $x=\delta$ 对称或反对称, 那么

$$\widehat{g}(-\xi)=\epsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta\xi}\widehat{g}(\xi)\,。\tag{2.10.9}$$

把上式代入 (2.10.6), 我们得到

$$D(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})\widehat{f}(-\xi) = \epsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta\xi}D(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})\widehat{f}(\xi)\,。\tag{2.10.10}$$

记 $R(z)$ 是 $D(z)$ 和 $D(z^{-1})$ 的最大公因式, 又记 $\widetilde{D}(z)=D(z)/R(z)$。由 $R(z)$ 的定义知 $R(z^{-1})=\epsilon' z^k R(z)$, 其中 $\epsilon' = \pm 1$。再由 (2.10.10), 我们得到

$$\widetilde{D}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})\widehat{f}(-\xi) = \epsilon\epsilon'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta+k)\xi}\widetilde{D}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})\widehat{f}(\xi)\,。\tag{2.10.11}$$

假如存在一个非零复数 $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 使得 $\widetilde{D}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0$, 那么 $\widetilde{D}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \neq 0$, 这与 (2.10.11) 结合起来就说明了, 对所有整数 k 成立 $\widehat{f}(\theta + 2k\pi) = 0$。根据定理2.6.1, 这与 f 的线性无关整平移性矛盾。因此 $\widetilde{D}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})$ 是一个单项式, 即存在常数 $C \in \mathbb{R}$ 和整数 $l \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{D}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}$。把此式代入 (2.10.11) 得到 f 的对称性。
□

定理 2.10.3 设 f 是一个紧支撑的细分函数其伸缩因子为 2。那么 f 既对称又正交的充分必要条件是: f 是 $\chi_{[0,1)}$ 的整平移。

证明: 显然 $\chi_{[0,1)}$ 的整平移既对称又正交, 因此我们只要证明必要性。设 f 满足下列细分方程

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(2\cdot -j)$$

并记 $H(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。由于 f 是紧支撑的, $c(j) = \frac{1}{2}\langle f, f(2\cdot -j)\rangle$ 以及 $H(\xi)$ 为三角多项式。如果 f 对称, 由定理2.10.1,

$H(\xi)$ 也对称, 即存在整数 N 使得

$$H(-\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\xi}H(\xi)\text{ 。}\tag{2.10.12}$$

由定理2.5.1,

$$|H(\xi)|^2+|H(\xi+\pi)|^2=1\text{ 。}\tag{2.10.13}$$

把 (2.10.12) 代入 (2.10.13),

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\xi}H(\xi)^2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}N(\xi+\pi)}H(\xi+\pi)^2=1\text{ 。}\tag{2.10.14}$$

记 $H(\xi)^2=\sum_{j\in\mathbb{Z}}h(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 。 那么, 存在 j_1,j_2 使得 $h(2j_1)h(2j_2)\neq 0$, 以及 $h(j)=0$ 对所有 $j>2j_2$ 或 $j<2j_1$ 成立。由 (2.10.14) 知 N 必为奇数。因此, 我们可以将 (2.10.14) 写成

$$(H(\xi)+H(\xi+\pi))\,(H(\xi)-H(\xi+\pi))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\xi}\text{ 。}\tag{2.10.15}$$

由此

$$\begin{cases} H(\xi)+H(\xi+\pi)=\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N_0\xi}\,, \\ H(\xi)-H(\xi+\pi)=\alpha^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-N_0)\xi}\,, \end{cases}\tag{2.10.16}$$

对某个 $N_0\in\mathbb{Z}$ 和 $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$ 成立。从 (2.10.16) 和 $H(0)=1$ 立即可知, $\alpha=1$ 和 $H(\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N_0\xi}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-2N_0)\xi})/2$ 。

当 $N-2N_0=0$ 时, f 是 Delta 分布, 它不具有正交的整平移。当 $N-2N_0\geq 1$ 时, $f=\frac{1}{N-2N_0}\chi_{[0,N-2N_0)}(\cdot-N_0)$, 结合正交性可得 $N-2N_0=1$。而当 $N-2N_0\leq -1$ 时, $f=\frac{1}{|2N_0-N|}\chi_{[0,2N_0-N)}(\cdot-N_0-N)$。同样结合正交性知 $2N_0-N=1$。综合上述, f 是 $\chi_{[0,1)}$ 的整平移。 □

最后，我们必须指出在 $M \geq 3$ 的情形，上述结论不成立。记 $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4}$，那么下列细分方程。

$$
\begin{aligned}
f \;=\; & \alpha f(Mx) + \frac{1}{2} f(Mx-1) + (1-\alpha) f(Mx-2) + f(Mx-3) \\
& + \cdots + f(Mx-M+1) + (1-\alpha) f(Mx-M) \\
& + \frac{1}{2} f(Mx-M-1) + \alpha f(Mx-M-2),
\end{aligned}
$$

的连续解就同时具有对称性和正交性（[2]）。

2.11 插值性

一个定义在实轴上的连续函数 f 在满足 $f(0) = 1$ 和 $f(j) = 0, j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 时被称为具有插值性。典型的例子是 sinc 函数 $\operatorname{sinc}(x) = \sin \pi x / \pi x$ 和帽函数

$$
h(x) = (1-|x|)_{+} = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1,0)\,, \\ 1-x, & x \in [0,1]\,, \\ 0, & |x| > 1\,。\end{cases}
$$

如果 ϕ 具有插值性，那么由其整平移生成的空间

$$
V = \operatorname{Span}\{\phi(\cdot - j), \quad j \in \mathbb{Z}\}
$$

中的任意函数 f 可以表示为 $f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)\phi(x-j)$。因此，当 ϕ 具有插值性和紧支撑性时，ϕ 就具有线性无关的整平移。在 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)|$ 是连续函数时，利用 Poisson 求和公式，我们得到

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(\xi+2k\pi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\ 。
$$

从而 ϕ 具有插值性的充分必要条件是

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi + 2k\pi) = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}\text{。}$$

对细分函数的插值性, 我们有下面的结论。

定理 2.11.1 设 f 是一个紧支撑的连续函数且满足细分方程

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(Mx - j) \quad \text{和} \quad \widehat{f}(0) = 1, \tag{2.11.1}$$

而序列 $\{c(n)\}$ 具有有限长。那么, 符号 $H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 在 f 具有插值性时, 满足

$$\sum_{s=0}^{M-1} H(\xi + 2s\pi/M) = 1\text{。} \tag{2.11.2}$$

反之, 如果 H 满足 (2.11.2) 并且 f 有稳定的整平移时, f 就有插值性。

证明: 假设 f 具有插值性。那么

$$f(j) = \delta(j), \qquad j \in \mathbb{Z}\text{。} \tag{2.11.3}$$

另一方面, 由 (2.11.1) 知

$$f(j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k) f(Mj - k)\text{。} \tag{2.11.4}$$

综合 (2.11.3) 和 (2.11.4) 得到

$$c(Mj) = \delta(j), \qquad j \in \mathbb{Z}\text{。} \tag{2.11.5}$$

根据 $H(\xi)$ 的定义, 这就证明了 (2.11.2)。

反过来, 假定 H 满足 (2.11.2) 并且 f 有稳定的整平移。取 f_0 为帽函数, 即 $f_0(x) = (1 - |x|)_+$, 并定义

$$f_n(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c(j) f_{n-1}(Mx - j), \qquad n \geq 1 \text{。}$$

那么 f_n 是连续函数。根据 f 的连续性、定理2.3.2 和定理2.9.3, 我们知道

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \text{。}$$

因此, 我们只要能归纳地证明 f_n, $n \geq 0$, 的插值性即可。由 f_0 的定义知 f_0 具有插值性。归纳地假设 f_{n-1} 具有插值性, 那么

$$f_n(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) f_{n-1}(Mj - k) = c(Mj) = \delta(j), \qquad j \in \mathbb{Z} \text{。}$$

这便证明了 f_n 的插值性, 也同时完成了定理的证明。 $\square$

sinc 函数具有正交性和插值性, 但不具有紧支撑性。帽函数具有插值性和紧支撑性, 但没有正交性。当伸缩因子为 2 时, 我们不可能得到一个连续函数, 使得它同时具有紧支撑性、正交性和插值性。然而, 当伸缩因子 $M \geq 3$ 时, 我们能够找到这样的函数 (见 § 4.4 节)。

定理 2.11.2 **当伸缩因子为 2 时, 不存在细分函数使得它同时具有正交性、插值性和紧支撑性。**

证明: 设 f 满足下列细分方程

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c(j) f(2 \cdot - j),$$

并且 f 同时具有紧支撑性、正交性和插值性。因为 f 具有插值性, 所以 $c(j) = f(j/2), j \in \mathbb{Z}$, 从而 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 具有有限长度。记 $H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。那么, 由 f 的正交性和插值性知

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\pi)|^2 = 1 \tag{2.11.6}$$

和

$$H(\xi) + H(\xi+\pi) = 1 \text{。} \tag{2.11.7}$$

由 (2.11.7), $H(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\widetilde{H}(2\xi)$。把此式代入 (2.11.6) 得到 $|\widetilde{H}(\xi)|^2 = 1$。因此, 存在 $\epsilon = \pm 1$ 和整数 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $\widetilde{H}(\xi) = \epsilon\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}$。当 $\epsilon = -1$ 时, $H(0) = 0$ 和 $|H(\xi)| \leq 1$。从而 $\prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\xi) = 0$, 这蕴涵了 f 是一个零函数, 也就与插值性矛盾。如果 $\epsilon = 1$,

$$H(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1)\xi}\right) \text{。}$$

然而, 我们知道细分方程 $g(x) = g(2x) + g(2x-2m-1)$ 的紧支撑解为 $(2m+1)^{-1}\chi_{[0,2m+1)}$, $m \geq 0$, 或 $-(2m+1)^{-1}\chi_{[2m+1,0)}$, $m \leq -1$, 而它们均不是连续函数, 这便完成了定理的证明。 □

2.12 解析表达式

设 f 是一个实轴上的紧支撑函数。如果存在区间 $[a,b] \supset \mathrm{supp} f$ 上的一个分割 $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = b$, 使得 f 在每个子区间 (a_i, a_{i+1}) 上, $1 \leq i \leq N$, 是某个多项式的限制。此时, 我们称 f 是一个分段多项式。同样, 如果分割 $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = b$ 的选取能使 f 在每个子区间 (a_i, a_{i+1}), $1 \leq i \leq$

N 上是某个实轴上的 $\mathbb{C}^\infty$ 函数的限制, 我们就称 f 是一个分段光滑函数。

一个具有明确的表达式的细分函数是很重要的, 特别在需要有很高精度的地方。$B-$样条作为紧支撑的细分函数, 它是分段多项式, 从而也是分段 $\mathbb{C}^\infty$ 函数。但不幸的是, 一个具有分段光滑的紧支撑细分函数一定是 $B-$样条的线性组合([47])。这迫使我们需要引入局部多项式的概念, 而一个局部多项式仍然可认为具有解析表达式。

如果 f 是实轴上紧支撑于 $[a,b]$ 的函数, 并且存在开集 $A \subset [a,b]$, 使得 f 在 A 的每个连通分支(即包含于 A 的开区间)上的限制是多项式, 同时 A 的 Lebesgue 测度 $|A|$ 等于 $b-a$, 那么 f 被称为是局部多项式。显然, 一个分段多项式是一个局部多项式。对一个局部多项式 f, 当对应的开集 A 和 f 在开集上的限制有明显表达式时, 我们自然可以认为 f 有明确的表达式。

定理 2.12.1 设 f 是一个紧支撑的细分可测函数, 并满足下列细分方程

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j) f(M\cdot -j)\,。 \tag{2.12.1}$$

又设 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 所对应的三角多项式 $H(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 有下列分解形式

$$H(\xi) = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^N Q_r(\xi), \tag{2.12.2}$$

其中 N 是一个整数, $Q_r(\xi) = \sum_{j=0}^{r} q(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 满足 $Q_r(0) = 1$ 以及 $0 < r < M-1$。那么 f 是一个局部多项式。

为证明定理2.12.1, 我们需要引入一些记号和先证明一些引理。设 f 如定理2.12.1 中所述。记

$$\begin{cases} F(x) = (f(x), \cdots, f(x+N-1))^T, \\ \widetilde{F}(x) = (f(x+1), \cdots, f(x+N))^T, \quad x \in (0,1), \end{cases}$$

和

$$m_j = \int_{\mathbb{R}} x^j f(x) \mathrm{d}x, \qquad 0 \le j \le N-1 \text{。}$$

定义 $A(x) = \big((x+k)^j\big)_{0 \le j,k \le N-1}$ 以及

$$\widetilde{A}(x) = \big((x+k)^j\big)_{0 \le j \le N-1, 1 \le k \le N} \text{。}$$

容易验证

$$\det A(x) = \prod_{0 \le i < j \le N-1} (j-i) \ne 0 \text{。} \tag{2.12.3}$$

引理 2.12.1 **设** r **和** f **如定理2.12.1 所述。那么, 在** $(0,1)$ **上成立**

$$\begin{cases} A(x)F(x) = (m_0, \cdots, m_{N-1})^T \\ \qquad\qquad -(1, x+N, \cdots, (x+N)^{N-1})^T f(x+N), \\ \widetilde{A}(x)\widetilde{F}(x) = (m_0, \cdots, m_{N-1})^T - (1, x, \cdots, x^{N-1})^T f(x) \text{。} \end{cases} \tag{2.12.4}$$

此外, f **在** $\cup_{j=0}^{N-1}(j + (\frac{r}{M-1}, 1))$ **上的限制为至多** $N-1$ **次的多项式。**

证明: 由 (2.12.2) 知, f 支撑于 $[0, \frac{r}{M-1} + N]$。从而由 (2.12.4) 的第一式和 (2.12.3), f 在 $\cup_{j=0}^{N-1} \Big(j + (\frac{r}{M-1}, 1)\Big)$ 上的限制为至

多 $N-1$ 次的多项式。因此, 我们只需证明(2.12.4)。

由 (2.12.2) 和定理2.8.1 知

$$\widehat{f}^{(j)}(2k\pi)=0 \tag{2.12.5}$$

对所有 $0\leq j\leq N-1$ 和 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 成立。从而由 Poisson 求和公式和 (2.12.5) 可得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x+k)^j f(x+k)=\int_{\mathbb{R}}x^j f(x)\mathrm{d}x=m_j\,,\qquad 0\leq j\leq N-1\text{ 。}$$

再根据 $\mathrm{supp}f\subset[0,N+\frac{r}{M-1}]$, 对 $x\in[0,1)$, 我们得到

$$\sum_{k=0}^{N}(x+k)^j f(x+k)=m_j\,,\qquad 0\leq j\leq N-1\text{ 。}$$

这就证明了 (2.12.4)。 □

引理 2.12.2 设 f 如定理2.12.1 中所述。那么, 存在 $a(0),\cdots,a(r)$ 和次数至多为 $N-1$ 的多项式 $P_1,\cdots,P_r$, 使得对所有 $j=0,1,\cdots,r$,

$$f\left(\frac{x+j}{M}\right)=a(j)f(x)+P_j(x),\qquad x\in(0,1)\text{ 。} \tag{2.12.6}$$

此外, 对任何 $k\geq 1$ 和 $\epsilon_j\in\{0,1,\cdots,r\}$, $1\leq j\leq k$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\epsilon_j}{M^j}+\frac{x}{M^k}\right)=\prod_{j=1}^{k}a(\epsilon_j)f(x)+P_{\epsilon_k}\left(\sum_{j=2}^{k}\frac{\epsilon_j}{M^{j-1}}+\frac{x}{M^{k-1}}\right)$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}\prod_{l=k-i}^{k}a(\epsilon_l)P_{\epsilon_{k-1-i}}\left(\sum_{j=i+s}^{k}\frac{\epsilon_j}{M^{j-i-2}}+\frac{x}{M^{k-i-2}}\right) \tag{2.12.7}$$

对所有 $x \in (0,1)$ 成立。

证明: 由 (2.12.1), 对 $x \in (0,1)$, 成立下式

$$f\left(\frac{x+j}{M}\right) = \sum_{l=0}^{(M-1)N+r} c(l) f(x+j-l) = \sum_{l=0}^{j} c(j-l) f(x+l) \text{。} \tag{2.12.8}$$

由引理2.12.1, 存在 $d_j \in \mathbb{R}$ 和次数不超过 $N-1$ 的多项式 Q_j, $0 \leq j \leq N$, 使得

$$f(x+j) = d_j f(x) + Q_j(x) \text{。} \tag{2.12.9}$$

综合 (2.12.8) 和 (2.12.9) 就蕴涵了 (2.12.6)。反复利用 (2.12.6), 我们容易得到 (2.12.7)。 $\square$

对任意的 $\epsilon_j \in \{0, 1, \cdots, r\}$ 和 $1 \leq j \leq k$, 定义

$$A(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\epsilon_j}{M^j} + \frac{r}{(M-1)M^k}, \sum_{j=1}^{k} \frac{\epsilon_j}{M^j} + \frac{1}{M^k} \right) \text{。}$$

显然当 $\epsilon_k \neq r$ 时, $A(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) \subset (0, \frac{r}{M-1})$。

引理 2.12.3 设 $A(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k)$ 如上所述。那么, 当 $\epsilon_k, \epsilon'_{k'} \neq r$ 时, 除 $k = k'$ 并且 $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) = (\epsilon'_1, \cdots, \epsilon'_{k'})$ 之外都成立

$$A(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) \cap A(\epsilon'_1, \cdots, \epsilon'_{k'}) = \emptyset \text{。} \tag{2.12.10}$$

证明: 定义

$$a(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\epsilon_j}{M^j} + \frac{r}{(M-1)M^k}$$

和

$$b(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\epsilon_j}{M^j}+\frac{1}{M^k}\text{。}$$

显然, 我们只要证明: 当 $a(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_{k'})>a(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)$ 时

$$a(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_{k'})\geq b(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)\text{。}\tag{2.12.11}$$

事实上, 我们只需在下面的两种情况下: a) $\epsilon'_1\neq\epsilon_1$ 和 b) $\epsilon'_1=\epsilon_1$ 并且 $k=1$ 或 $k'=1$, 证明 (2.12.11)。

注意到当 $\epsilon'_1<\epsilon_1$ 时,

$$a(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_{k'})<M^{-1}(1+\epsilon'_1)\leq a(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)\,,$$

这与假设矛盾。所以对第一种情形 $\epsilon'_1\neq\epsilon_1$, 我们有 $\epsilon'_1>\epsilon_1$。因此,

$$b(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)\leq M^{-1}(1+\epsilon_1)\leq a(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_{k'})$$

即 (2.12.11) 成立。

当 $\epsilon'_1=\epsilon_1$ 并且 $k_1=1$ 或 $k'=1$ 时, 我们可以说明 $k'=1$。否则 $k=1$,

$$\begin{aligned}a(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_{k'}) &< \frac{\epsilon_1}{M}+\sum_{j=2}^{k'}\frac{r}{M^j}+\frac{r}{(M-1)M^k}\\ &= \frac{\epsilon_1}{M}+\frac{r}{(M-1)M}=a(\epsilon_1),\end{aligned}$$

这与假设矛盾。从而在情形 b) 时 $\epsilon'_1=\epsilon_1$ 和 $k'=1$。此时

$$b(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{k'})\leq\frac{\epsilon_1}{M}+\sum_{j=2}^{k-1}\frac{r}{M^j}+\frac{r-1}{M^k}+\frac{1}{M^k}\leq a(\epsilon'_1),$$

这同样证明了 (2.12.11)。 □

现在, 我们开始证明定理2.12.1。

定理2.12.1 的证明: 定义

$$O = \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{k-1})\in\{0,1,\cdots,r\}^{k-1}} \cup_{\epsilon_k\in\{0,1,\cdots,r-1\}} A(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k)$$

和

$$A = \left(\cup_{i=0}^{N}(O+i)\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{N-1}\left(i+\left(\frac{r}{M-1},1\right)\right)\right) 。$$

由引理2.12.2, f 在 A 的每个子区间上的限制是次数不超过 $N-1$ 的多项式。另一方面, 由引理2.12.3,

$$\begin{aligned} |A| &= N\left(1-\frac{r}{M-1}\right) \\ &\quad +(N+1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{M-1}\right)\frac{r}{M}\left(\frac{r+1}{M}\right)^{k-1} \\ &= N+\frac{r}{M-1} 。\end{aligned}$$

这便完成了定理2.12.1 的证明。 $\square$

第三章　多分辨分析和小波

本章引入多分辨分析及其尺度函数的概念。§3.2 节讨论尺度函数和细分函数的关系, 说明细分函数为某多分辨分析的尺度函数的充分必要条件是该函数的整平移具有稳定性; §3.3 与 §3.4 节分别介绍了如何采用矩阵扩张的方法从一个多分辨分析出发构造正交小波和半正交小波基; §3.5 节介绍了从一个双正交多分辨分析出发构造双正交小波基的方法; §3.6 节给出了小波分解与合成的算法。

3.1　多分辨分析和尺度函数

本节将介绍多分辨分析以及它与尺度函数的密切联系。设 M 是一个大于等于 2 的整数。一个多分辨分析指的是满足下列条件的一族 $L^2(\mathbb{R})$ 闭子空间 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$:

(i) $V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 并且 $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(iii) $f \in V_j$ 与 $f(M\cdot) \in V_{j+1}$ 等价;

(iv) 存在 V_0 中的函数 ϕ, 使得 $\{\phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 成为 V_0 的一组 Riesz 基。即, 对任意 $f \in V_0$, 存在惟一的 ℓ^2 序列 $\{d(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和与 f 无关的正常数 $A, B > 0$ 使得

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\phi(\cdot - k) \tag{3.1.1}$$

以及

$$A\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2\right)^{1/2} \le \|f\|_2 \le B\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2\right)^{1/2} 。 \tag{3.1.2}$$

在多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的定义中, 条件 (iv) 中的函数 ϕ 被称为此多分辨分析的尺度函数。由条件 (iii), 对任意 $j \in \mathbb{Z}$ 成立

$$V_j = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\phi(M^j \cdot - k) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2 < \infty\right\} 。 \tag{3.1.3}$$

这说明了一个尺度函数就决定了空间族 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$。对任意一个多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 我们能找到许多尺度函数。

定理 3.1.1 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, ϕ 是它的一个尺度函数。那么, $\widetilde{\phi} \in V_0$ 是一个尺度函数的充分必要条件是: 存在一个 2π 周期函数 $A(\omega)$ 和一个正常数 C, 使得

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = A(\omega)\widehat{\phi}(\omega) \tag{3.1.4}$$

和

$$C^{-1} \le |A(\omega)| \le C\,, \qquad \omega \in [0, 2\pi] 。 \tag{3.1.5}$$

证明: 先证充分性。记

$$A(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\text{ 。}\tag{3.1.6}$$

由 (3.1.4) 和 (3.1.5) 知, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a(k)|^2<\infty$ 且

$$\widetilde{\phi}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a(k)\phi(\cdot-k)\text{ 。}$$

从而 $\widetilde{\phi}\in V_0$。另一方面, 对任意给定的 $f\in V_0$, 由 ϕ 的定义知, 存在 2π 周期的 L^2 函数 $D(\omega)$ 和与 f 无关的正常数 A,B 使得

$$\widehat{f}(\omega)=D(\omega)\widehat{\phi}(\omega)$$

以及

$$A\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\le\|f\|_2\le B\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\text{。}\tag{3.1.7}$$

记 $\widetilde{D}(\omega)=D(\omega)A(\omega)^{-1}$, 那么

$$\widehat{f}(\omega)=\widetilde{D}(\omega)\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega),\tag{3.1.8}$$

并且 $\widetilde{D}(\omega)$ 是一个 2π 周期函数,

$$\begin{aligned}A\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}&\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\widetilde{D}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\\&\le B\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}\text{ 。}\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

综合 (3.1.7), (3.1.8) 和 (3.1.9) 可知, $\widetilde{\phi}$ 是一个尺度函数。

再证必要性。设 $\widetilde{\phi}$ 是一个尺度函数, 则存在 2π 周期函数 $A(\omega)$ 使得

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = A(\omega)\widehat{\phi}(\omega)\ 。\tag{3.1.10}$$

由于 $\widetilde{\phi}$ 和 ϕ 都是尺度函数, $\widetilde{\phi}$ 和 ϕ 均有稳定的整平移。因此, 存在正常数 C_1 和 C_2 使得

$$C_1^{-1} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \le C_1, \tag{3.1.11}$$

和

$$C_2^{-1} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega + 2k\pi)\right|^2 \le C_2, \qquad \omega \in \mathbb{R}\ 。\tag{3.1.12}$$

把 (3.1.10) 代入 (3.1.12), 我们得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = |A(\omega)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2\ 。$$

将上式与 (3.1.11) 和 (3.1.12) 结合起来就不难得到 (3.1.5)。 □

由定理3.1.1, 对任给的一个多分辨分析, 一定存在有正交整平移的尺度函数。

推论 3.1.1 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, ϕ 是它的一个尺度函数。定义 $\widetilde{\phi}$ 为

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2\right)^{1/2}}\ 。$$

那么, $\widetilde{\phi}$ 是一个具有正交整平移的尺度函数。

定理 3.1.2 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析。如果存在紧支撑的尺度函数, 那么一定存在具有线性无关整平移的紧支撑尺度函数。

证明: 记

$V_c = \big\{g \in V_0 : \mathrm{supp} g \subset [0,\infty),\ g\text{为具有紧支撑的尺度函数}\big\}$ 。

由假设知 $V_c \neq \emptyset$。对 V_c 中的函数 g, 定义 $S^+(g)$ 为满足 $\mathrm{supp} g \subset [0, S^+(g)]$ 的最小值。选取 V_c 中的函数 g_1, 使得

$$S^+(g_1) \le \min\big\{S^+(g) : g \in V_c\big\} + \frac{1}{2} \text{ 。} \tag{3.1.13}$$

由 g_1 的选取可知, g_1 是一个尺度函数。现只需证明: g_1 具有线性无关的整平移。反之, g_1 有线性相关的整平移。那么由定理2.6.1, 存在复数 z_0 使得

$$\widehat{g}_1(z_0 + 2k\pi) = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \text{ 。} \tag{3.1.14}$$

由于 g_1 具有稳定的整平移, 从而 z_0 的虚部非零, 即 $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$。从 (3.1.14) 和 Poisson 求和公式知

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0 k} g_1(x-k) = 0, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ 。} \tag{3.1.15}$$

当 $\mathrm{Im} z_0 > 0$ 时, 定义

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0 k}) g_1(x-k) \text{ 。} \tag{3.1.16}$$

由于 $\big|\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0 k})\big| = \mathrm{e}^{-(\mathrm{Im} z_0)k}$, $k \ge 0$, 从而 $h \in V_0$。由 (3.1.16) 得

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\xi) \quad &= \quad \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi+z_0)})^{-1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi-\overline{z}_0)})^{-1} \\ &\quad\ \times \big(2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{z}_0})\big)\,\widehat{g}(\xi) \text{ 。} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

从 (3.1.17) 和定理3.1.1 可知, h 是一个尺度函数。根据 g_1 的定义得知

$$\operatorname{supp} h \subset [0, \infty)\ 。\tag{3.1.18}$$

同时由 (3.1.16) 又得

$$h = \sum_{k=-\infty}^{-1} \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0 k}) g_1(x-k),$$

从而

$$\operatorname{supp} h \subset (-\infty, S^+(g_1)-1]\ 。\tag{3.1.19}$$

综合 (3.1.18) 和 (3.1.19), 我们得到

$$\operatorname{supp} h \subset [0, S^+(g_1)-1],\tag{3.1.20}$$

从而 $h \in V_c$。根据 (3.1.20), $S^+(h) \le S^+(g_1)-1$。这与 (3.1.13) 矛盾。

类似地对 $\operatorname{Im} z_0 < 0$ 的情况, $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{0} \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0 k}) g_1(x-k)$ 是尺度函数并支撑于 $[0, S^+(g_1)-1]$, 这同样与 (3.1.13) 矛盾。
□

定理 3.1.3 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, ϕ_1 和 ϕ_2 是两个具有线性无关整平移的紧支撑尺度函数。那么, 存在非零常数 C 和整数 k 使得 $\phi_1 = C\phi_2(\cdot - k)$。

证明: 由尺度函数的定义, 存在 ℓ^2 序列 $\{d(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 使得

$$\phi_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\phi_2(\cdot - k)\ 。$$

由定理2.6.1, 存在紧支撑的 $\mathbb{C}^\infty$ 函数 h 使得

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\phi_2(\cdot - k)\mathrm{d}x = \delta_k\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,。$$

因此

$$d(k) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1(x)h(x-k)\mathrm{d}x\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,。$$

这说明了 $\{d(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一个有限长序列。记

$$D(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} d(k)z^{-k}\,。$$

现在我们只需证明 $D(z)$ 是一个单项式。假设 $D(z)$ 不是单项式, 则由代数基本定理, 存在非零复数 z_0 使得 $D(z_0)=0$。此时

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j\phi_1(\cdot - j) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} z_0^j d(k)\phi_2(\cdot - k - j)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} z_0^j\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} z_0^{-k}d(k)\right)\phi_2(\cdot - j) = 0,\end{aligned}$$

这与 ϕ_1 具有线性无关整平移矛盾。 □

3.2 尺度函数和细分函数

本节将讨论细分函数和尺度函数的相互关系。本节的主要结论是定理3.2.3。

定理 3.2.1 **设 $\phi \in L^2$ 具有稳定的整平移。定义**

$$V_j = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)M^{j/2}\phi(M^j\cdot - k) : \sum_{k\in\mathbb{Z}}|d(k)|^2 < \infty\right\}, \quad j \in \mathbb{Z}\,。$$

那么 $\cap_{j\in\mathbb{Z}}V_j = \{0\}$。

证明: 定义

$$\widehat{\widetilde{\phi}}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}\text{。}$$

则 $\widetilde{\phi} \in L^2$ 有正交的整平移, 且

$$V_j = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)M^{j/2}\widetilde{\phi}(M^j\cdot -k) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2 < \infty\right\}, \quad j\in\mathbb{Z}\text{。}$$

所以, 我们不妨假设函数 ϕ 有正交的整平移。

取 $f \in \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, 我们只需证明 $\|f\|_2 = 0$。对任意给定的 $\epsilon > 0$, 由紧支撑连续函数在 L^2 中的稠密性, 存在紧支撑 L^2 函数 $\widetilde{f}$, 使得

$$\|f - \widetilde{f}\|_2 < \epsilon\text{。} \tag{3.2.1}$$

定义 L^2 到 V_j 的投影算子 P_j 为

$$P_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k}\rangle \phi_{j,k},$$

其中 $\phi_{j,k}(x) = M^{j/2}\phi(M^j x - k), \quad j,k\in\mathbb{Z}$。容易得到

$$\|f - P_j\widetilde{f}\|_2 = \|P_j(f-\widetilde{f})\|_2 \le \|f - \widetilde{f}\|_2 < \epsilon,$$

从而

$$\|f\|_2 \le \|P_j\widetilde{f}\|_2 + \epsilon = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \widetilde{f}, \phi_{j,k}\rangle|^2\right)^{1/2} + \epsilon\text{。} \tag{3.2.2}$$

由 (3.2.2) 和 $\epsilon > 0$ 的任意性, 我们只要证明:

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \widetilde{f}, \phi_{j,k}\rangle|^2 = 0, \tag{3.2.3}$$

对任意紧支撑的连续函数$\widetilde{f}$成立。取正数R使得$\mathrm{supp}\widetilde{f} \subset \{x : |x| \le R\}$。那么, 对任意的$j, k \in \mathbb{Z}$, 我们有下面的估计

$$\begin{aligned} |\langle \widetilde{f}, \phi_{j,k} \rangle| &\le M^{j/2} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f}(x)| \times |\phi(M^j x - k)| \mathrm{d}x \\ &\le \|\widetilde{f}\|_\infty M^{j/2} \int_{|x| \le R} |\phi(M^j x - k)| \mathrm{d}x \\ &\le \|\widetilde{f}\|_\infty \left(\int_{k - M^j R}^{k + M^j R} |\phi(y)| \mathrm{d}y \right)^{1/2} 。\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

定义$S_{R,j} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} [k - M^j R, k + M^j R]$。当$M^j R \le 1/2$时, 由 (3.2.4) 得

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \widetilde{f}, \phi_{j,k} \rangle|^2 \le \|\widetilde{f}\|_\infty^2 \int_{S_{R,j}} |\phi(x)|^2 \mathrm{d}x 。\tag{3.2.5}$$

显然$S_{R,j-1} \subset S_{R,j}$, 并且$\lim_{j \to -\infty} \chi_{S_{R,j}}(x) = 0$对几乎所有$x \in \mathbb{R}$成立。从而由 (3.2.5) 和控制收敛定理可以得到 (3.2.3)。 $\square$

定理 3.2.2 **设**$\phi \in L^1 \cap L^2$**有稳定的整平移且**$\widehat{\phi}(0) \ne 0$。**定义**

$$V_j = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) M^{j/2} \phi(M^j \cdot -k) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d(k)|^2 < \infty \right\}, \quad j \in \mathbb{Z} 。$$

那么, $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ **在**L^2**中稠密**。

证明: 任取$f \in (\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j)^\perp$和正数$\epsilon > 0$, 由紧支撑$\mathbb{C}^\infty$函数在$L^2(\mathbb{R})$中稠密性知, 存在紧支撑的$\mathbb{C}^\infty$函数$\widetilde{f}$使得$\|f - \widetilde{f}\|_2 \le \epsilon$。设$P_j$为$L^2$到$V_j$的投影算子。由$f$的定义则有$\|P_j f\|_2 = \langle f, P_j f \rangle = 0$, 从而

$$\|P_j \widetilde{f}\|_2 = \|P_j (f - \widetilde{f})\|_2 \le \|f - \widetilde{f}\|_2 \le \epsilon 。\tag{3.2.6}$$

又由投影算子的定义知, 存在与 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 无关的正常数 B, 使得

$$\|P_j g\|_2 \geq B\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle g, M^{j/2}\phi(M^j\cdot -k)\right\rangle\right|^2\right)^{1/2} 。$$

把上述估计式代入 (3.2.6) 得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle\widetilde{f}, M^{j/2}\phi(M^j\cdot -k)\rangle|^2 \leq B^{-2}\epsilon^2 。\tag{3.2.7}$$

现在我们来估计 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle\widetilde{f}, M^{j/2}\phi(M^j\cdot -k)\rangle|^2$。利用 Parseval 恒等式, 我们知道

$$\langle\widetilde{f}, M^{j/2}\phi(M^j\cdot -k)\rangle = M^{-j/2}\left\langle\widehat{\widetilde{f}}, \widehat{\phi}(M^{-j}\cdot)e^{-iM^{-j}k\cdot}\right\rangle 。$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\langle\widetilde{f}, M^{j/2}\phi(M^j\cdot -k)\rangle\right|^2\\
= &\sum_{k\in\mathbb{Z}}M^{-j}\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{\widetilde{f}}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(M^{-j}\xi)}e^{-iM^{-j}k\xi}\mathrm{d}\xi\right|^2\\
= &\sum_{k\in\mathbb{Z}}M^{j}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\widetilde{f}}(M^j(\xi+2l\pi))\overline{\widehat{\phi}(\xi+2l\pi)}\mathrm{d}\xi\right|^2\\
= &M^j\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\widehat{\widetilde{f}}(M^j(\xi+2l\pi))\overline{\widehat{\phi}(\xi+2l\pi)}\right|^2\mathrm{d}\xi\\
= &M^j\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\widetilde{f}}(M^j\xi)\right|^2|\widehat{\phi}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\\
&+\sum_{l'\neq 0}M^j\int_{\mathbb{R}}\widehat{\widetilde{f}}(M^j\xi)\overline{\widehat{\widetilde{f}}(M^j(\xi+2\pi l'))}\widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi+2\pi l')}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\widetilde{f}}(\xi)\right|^2 |\widehat{\phi}(M^{-j}\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\
& + \sum_{l\neq 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widetilde{f}}(\xi)\overline{\widehat{\widetilde{f}}(\xi+2M^j\pi l)}\widehat{\phi}(M^{-j}\xi)\overline{\widehat{\phi}(M^{-j}\xi+2\pi l)}\mathrm{d}\xi \text{。}
\end{aligned}
$$

记上式中第二项为 Ξ。由于我们假定了 $\widetilde{f}$ 的光滑性和紧支撑性,所以它的 Fourier 变换有一定的下降速度, 从而存在常数 C 使得

$$
\left|\widehat{\widetilde{f}}(\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-4} \text{。} \tag{3.2.8}
$$

把 (3.2.8) 以及 $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ 用于估计 Ξ, 我们得到

$$
\begin{aligned}
|\Xi| & \leq \sum_{l\neq 0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\widetilde{f}}(\xi)||\widehat{\widetilde{f}}(\xi+2M^j\pi l)||\widehat{\phi}(M^{-j}\xi)||\widehat{\phi}(M^{-j}\xi+2\pi l)|\mathrm{d}\xi \\
& \leq \|\widehat{\phi}\|_\infty^2 C^2 \sum_{l\neq 0}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{-4}(1+|\xi+2M^j\pi l|)^{-4}\mathrm{d}\xi \\
& \leq \|\widehat{\phi}\|_\infty^2 C^2 \sum_{l\neq 0}\int_{\mathbb{R}} (1+|2M^j\pi l|)^{-2}(1+|\xi|)^{-2}\mathrm{d}\xi \\
& \leq C'' M^{-j},
\end{aligned} \tag{3.2.9}
$$

在上述估计的第三个不等式中, 我们用了基本不等式 $(1+|a|)(1+|b|) \geq 1+|a+b|$。结合 (3.2.7), (3.2.8) 和 (3.2.9), 我们得到

$$
\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\widetilde{f}}(\xi)|^2|\widehat{\phi}(M^{-j}\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leq C''M^{-j} + B^{-2}\epsilon^2 \text{。} \tag{3.2.10}
$$

根据控制收敛定理, 在 (3.2.10) 两边关于 j 取上极限, 并利用 $\widehat{\phi}(0) \neq 0$, 我们得到

$$
|\widehat{\phi}(0)|^2\|\widetilde{f}\|_2^2 \leq B^{-2}\epsilon^2 \text{。}
$$

从而存在绝对常数 C 使得 $\|\widetilde{f}\| \leq C\epsilon$。这与 $\|f-\widetilde{f}\| \leq \epsilon$ 结合可知 $\|f\| \leq (C+1)\epsilon$, 再由 ϵ 的任意性得 $f = 0$。 $\square$

综合定理3.2.1和定理3.2.2, 我们得到下面的关于细分函数和尺度函数之间的关系。

定理 3.2.3 **如果** $\phi \in L^1 \cap L^2$ **满足细分方程**

$$\phi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\phi(M\cdot -j)$$

以及 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c(j)| < \infty$ **和** $\widehat{\phi}(0) = 1$。**那么,** ϕ **是某个多分辨分析的尺度函数的充分必要条件是:** ϕ **具有稳定的整平移。**

3.3 正交小波分解

如果 $\psi_1, \cdots, \psi_{M-1}$ 的伸缩和平移所生成的函数族 $\left\{M^{j/2}\psi_s(M^j\cdot -k) : 1 \le s \le M-1,\, j,k \in \mathbb{Z}\right\}$ 是 L^2 的标准正交基, 则称 $\psi_1, \cdots, \psi_{M-1}$ 为正交小波。本节将考虑这样的一个问题: 怎样从一个多分辨分析来构造正交小波基。

设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, ϕ 是它的一个正交尺度函数, 即它既是尺度函数又具有正交的整平移。由尺度函数的定义可知, 存在 ℓ^2 序列 $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$,使得

$$\phi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\phi(M\cdot -j)\,。\tag{3.3.1}$$

在本节中我们进一步假定

$$\phi \in L^1 \quad 和 \quad \widehat{\phi}(0) = 1\,,\tag{3.3.2}$$

并且

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c(j)| < \infty\,。\tag{3.3.3}$$

定理 3.3.1 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, ϕ 是它的一个正交尺度函数且满足 (3.3.1)~(3.3.3)。假设 $\psi_s \in V_1$, $1\le s\le M-1$, 可以表示为

$$\psi_s = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_s(j)\phi(M\cdot -j), \qquad 1\le s\le M-1, \tag{3.3.4}$$

且 $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|c_s(j)| < \infty$。那么, $\{\psi_s(\cdot-j) : 1\le s\le M-1, j\in\mathbb{Z}\}$ 是 $W_0 := V_1\ominus V_0$ 的一个标准正交基的充分必要条件是

$$\sum_{l=0}^{M-1} H_s(\xi+2\pi l/M)\overline{H_t(\xi+2\pi l/M)} = \delta_{s,t}, \qquad 0\le s,t\le M-1, \tag{3.3.5}$$

其中

$$H_0(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$$

和

$$H_s(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_s(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \qquad 1\le s\le M-1。$$

证明: 先证必要性。由定理2.5.1 和 ϕ 具有正交整平移的假设,

$$\sum_{l=0}^{M-1} H_0(\xi+2\pi l/M)\overline{H_0(\xi+2\pi l/M)} = 1。 \tag{3.3.6}$$

由 $\psi_s\in W_0$ 知,

$$\langle \psi_s(\cdot-j), \phi(\cdot-j')\rangle = 0, \qquad \forall\, j,j'\in\mathbb{Z}, \quad 1\le s\le M-1。 \tag{3.3.7}$$

类似于定理2.5.1 的证明, 我们知道 (3.3.7) 等价于

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_s(\xi+2\pi j)\overline{\widehat{\phi}(\xi+2\pi j)} = 0, \qquad \xi\in\mathbb{R}。 \tag{3.3.8}$$

对 (3.3.1) 和 (3.3.4) 两边分别取 Fourier 变换后, 我们得到

$$\widehat{\phi}(\xi) = H_0(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M) \tag{3.3.9}$$

和

$$\widehat{\psi}_s(\xi) = H_s(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M)\text{。} \tag{3.3.10}$$

将 (3.3.9) 和 (3.3.10) 代入 (3.3.8) 后, 再利用 ϕ 的正交整平移性质, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_s(\xi+2\pi j)\overline{\widehat{\phi}(\xi+2\pi j)} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} H_s\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi j}{M}\right)\overline{H_0\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi j}{M}\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi j}{M}\right)\right|^2 \\
&= \sum_{l=0}^{M-1} H_s\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}\right)\overline{H_0\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}\right)} \\
&\quad \times \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}+2\pi j\right)\right|^2 \\
&= \sum_{l=0}^{M-1} H_s\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}\right)\overline{H_0\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}\right)}\text{。}
\end{aligned}$$

这就证明了

$$\sum_{l=0}^{M-1} H_s(\xi+2\pi l/M)\overline{H_0(\xi+2\pi l/M)} = 0\text{。} \tag{3.3.11}$$

下面我们证明

$$\sum_{l=0}^{M-1} H_s(\xi+2\pi l/M)\overline{H_t(\xi+2\pi l/M)} = \delta_{s,t}\,, \quad \forall 1\le s,t\le M-1\text{。} \tag{3.3.12}$$

根据假设, 我们有

$$\langle\psi_s(\cdot-j),\psi_t(\cdot-j')\rangle=\delta_{s,t}\delta_{j,j'}\,,\quad \forall\, j,j'\in\mathbb{Z},\quad 1\le s,t\le M-1\,。\tag{3.3.13}$$

同样, 类似于定理2.5.1 的证明, (3.3.13) 等价于

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}_s(\xi+2\pi j)\overline{\widehat{\psi}_t(\xi+2\pi j)}=\delta_{s,t},\qquad \xi\in\mathbb{R}\,。\tag{3.3.14}$$

把 (3.3.10) 代入 (3.3.14), 利用 ϕ 的正交整平移性并用与 (3.3.11) 同样的证明方法, 我们得到

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\psi}_s(\xi+2\pi j)\overline{\widehat{\psi}_t(\xi+2\pi j)}=\sum_{l=0}^{M-1}H_s\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}\right)\overline{H_t\left(\frac{\xi}{M}+\frac{2\pi l}{M}\right)}\,。\tag{3.3.15}$$

结合(3.3.14)和(3.3.15) 这就证明了(3.3.12)。综合 (3.3.6), (3.3.11) 和 (3.3.12), 我们证明了 (3.3.5)。

再证充分性。记

$$W_{0,s}=\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}d_s(j)\psi_s(\cdot-j):\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}|d_s(j)|^2<\infty\right\}\,。$$

从我们的必要性证明中可以看到, $\{\psi_s(\cdot-j),\, j\in\mathbb{Z}\}$ 是 $W_{0,s}$ 的标准正交基, 而 $W_{0,s}$, $1\le s\le M-1$, 与 V_0 垂直, 且 $W_{0,s}$, $1\le s\le M-1$ 之间也相互正交。因此我们只要证明

$$V_1=V_0\oplus\left(\oplus_{s=1}^{M-1}W_{0,s}\right)\,。\tag{3.3.16}$$

由于 $\psi_s\in V_1$, $1\le s\le M-1$, 和序列 $\{c_s(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $1\le s\le M-1$, 是可和序列, 从而

$$W_{0,s}\subset V_1\,,\qquad 1\le s\le M-1\,。$$

所以我们只剩下证明

$$V_1 \subset V_0 \oplus \left(\oplus_{s=1}^{M-1} W_{0,s}\right) 。\tag{3.3.17}$$

由于$\{M^{1/2}\phi(M\cdot -j) : j \in \mathbb{Z}\}$是$V_1$的一组标准正交基, (3.3.17) 的证明就转化为: 对任意的$0 \le s \le M-1$, 存在ℓ^1序列$\{c^*_{s,t}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $0 \le t \le M-1$, 使得

$$M\phi(M\cdot -s) = \sum_{t=0}^{M-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c^*_{s,t}(j)\psi_t(\cdot - j),\tag{3.3.18}$$

为统一符号, 这里我们设了$\phi = \psi_0$。在 (3.3.18) 两边取 Fourier 变换并定义

$$R_{s,t}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c^*_{s,t}(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \qquad 0 \le s,t \le M-1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi/M}\widehat{\phi}(\xi/M) &= \sum_{t=0}^{M-1} R_{s,t}(\xi)\widehat{\psi}_t(\xi) \\ &= \sum_{t=0}^{M-1} R_{s,t}(\xi)H_t(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M) 。\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

从而我们只要找到这样的2π周期函数$R_{s,t}(\xi)$, 使得它们的Fourier系数是可和序列, 且

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi/M} = \sum_{t=0}^{M-1} R_{s,t}(\xi)H_t(\xi/M) 。\tag{3.3.20}$$

定义

$$R_{s,t}(\xi) = \sum_{l=0}^{M-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(\xi+2\pi l)/M}\overline{H_t\left(\frac{\xi+2\pi l}{M}\right)}, \quad 0 \le s,t \le M-1 。\tag{3.3.21}$$

显然 $R_{s,t}(\xi)$ 是 2π 周期函数。由于 $H_t(\xi)$, $0 \le t \le M-1$, 的 Fourier 系数是可和序列, 从而由 $R_{s,t}(\xi)$ 的定义知它们的 Fourier 系数也是可和序列。现在我们来验证 (3.3.20)。为此我们定义一个方阵

$$\mathcal{H}(\xi) = \left(H_t\left(\frac{\xi+2\pi t'}{M}\right)\right)_{0\le t,t'\le M-1} 。$$

利用此方阵 $\mathcal{H}$, 我们可以将 (3.3.5) 写成

$$\mathcal{H}(\xi)\overline{\mathcal{H}(\xi)}^T = I_M\,, \qquad \xi \in \mathbb{R} 。$$

这蕴涵了 $\overline{\mathcal{H}(\xi)}^T\mathcal{H}(\xi)$ 也是单位矩阵, 即

$$\sum_{t=0}^{M-1} H_t\left(\frac{\xi+2\pi l}{M}\right)\overline{H_t\left(\frac{\xi+2\pi l'}{M}\right)} = \delta_{l,l'}, \qquad 0\le l,l' \le M-1 。 \tag{3.3.22}$$

由 (3.3.21) 和 (3.3.22) 知

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{M-1} R_{s,t}(\xi)H_t\left(\frac{\xi}{M}\right)\\
&\quad= \sum_{l=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{M-1} e^{-is(\xi+2\pi l)/M}\overline{H_t\left(\frac{\xi+2\pi l}{M}\right)}H_t\left(\frac{\xi}{M}\right)\\
&\quad= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi/M} 。
\end{aligned}$$

这证明了 (3.3.20), 也同时完成了定理3.3.1 的证明。 □

设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, ϕ 是它的一个正交尺度函数且满足 (3.3.1)~(3.3.3)。又设 $\psi_s \in V_1$ 满足 (3.3.4) 和 (3.3.5)。定义

$$W_{j,s} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\psi_s(M^j\cdot -k): \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2 < \infty \right\} 。$$

那么 $V_1 = V_0 \oplus \left(\oplus_{s=1}^{M-1} W_{0,s}\right)$。设 P_j 为 L^2 到 V_j 的投影, Q_j 为 L^2 到 $W_j = V_{j+1} \ominus V_j = \oplus_{s=1}^{M-1} W_{j,s}$ 的投影。那么, 根据多分辨分析的定义, 对任意的 $f \in L^2$, 我们有

$$\lim_{j\to+\infty} \|f - P_j f\|_2 = 0 \quad 和 \quad \lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|_2 = 0\,。$$

另一方面

$$P_{j+1} = P_j + Q_j, \qquad j \in \mathbb{Z}\,。$$

从而

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f,$$

也就是说, $\{M^{j/2}\psi_s(M^j \cdot -k),\ 1 \le s \le M-1,\ j,k \in \mathbb{Z}\}$ 是 L^2 的标准正交基。这就说明了 $\{\psi_s,\ 1 \le s \le M-1\}$ 是 L^2 的正交小波。

从以上的分析我们看到, 从一个多分辨分析来构造正交小波的过程可转化为构造2π周期函数 $H_s(\xi), 1 \le s \le M-1$, 使得它们满足 (3.3.5), 也就是一个矩阵扩张的问题。准确地说, 给定第一行 $(H_0(\xi), \cdots, H_0(\xi + 2\pi(M-1)/M))$, 我们要找其它的 $(M-1)$ 行 $(H_s(\xi), \cdots, H_s(\xi + 2\pi(M-1)/M))$, $1 \le s \le M-1$, 使得这些行组成的方阵是一个酉矩阵。由于每一行事实上是由某个函数 H_s 生成的。因此, 每一行中的分量是相互有关联的, 这对我们的构造产生了麻烦。为避免此一问题, 我们引入一种称为多相位分解的方法。多相位分解的基本想法是: 把一个 2π 周期函数分解为 M 个 $2\pi/M$ 周期函数的叠加

$$H_s(\xi) = \sum_{t=0}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi} H_{s,t}(M\xi)\,。 \tag{3.3.23}$$

这时

$$H_s\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)=\sum_{t=0}^{M-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}e^{2\pi itl/M}H_{s,t}(M\xi),\ l=0,1,\cdots,M-1\text{。}$$

和

$$\begin{aligned}&\left(H_s\left(\xi+\tfrac{2\pi l}{M}\right)\right)_{0\le s,l\le M-1}\\&\quad=\left(H_{s,t}(M\xi)\right)_{0\le s,t\le M-1}\times\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)}\right)_{0\le t,l\le M-1}\text{。}\end{aligned}\tag{3.3.24}$$

注意到矩阵 $\frac{1}{\sqrt{M}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)}\right)_{0\le t,l\le M-1}$ 是一个酉矩阵。因此在记 $G(\xi)=\left(H_{s,t}(\xi)\right)_{0\le s,t\le M-1}$ 之后, 条件 (3.3.5) 就转化为关于 $H_s(\xi),0\le s\le M-1$, 的多相位分解 $G(\xi)$ 的下列条件

$$G(\xi)\overline{G(\xi)}^T=M^{-1}I\text{。}\tag{3.3.25}$$

与条件 (3.3.5) 相比较, $\sqrt{M}G(\xi)$ 与 $H(\xi)$ 同为酉矩阵, 但 $H(\xi)$ 的每一行元素的相互制约关系在矩阵 $G(\xi)$ 中不再拥有, 这对下面的向量酉扩张中特别有效。但另一方面, 我们在下一节中也会指出, 当考虑矩阵的对称扩张, 即 H_s, $0\le s\le M-1$, 具有某种对称性和反对称性时, 用条件 (3.3.5) 似乎更加合适。

我们不讨论一般的矩阵扩张问题, 而只考虑 H_s, $0\le s\le M-1$, 是三角多项式且 Fourier 级数为实系数的情形。

给定一个向量 $\alpha(\xi)=\left(\alpha_0(\xi),\cdots,\alpha_{M-1}(\xi)\right)^T$。一般的矩阵扩张方法如下: 选取一个矩阵类 $\mathcal{N}$, 这样的矩阵类通常是有限制的, 但一般要求它具有简单的形式、非奇异且容易计算。如在矩阵酉扩张中用到的矩阵类 (3.3.26)。又如由 $\{I_M+(z^k-1)P:k\in\mathbb{Z},P^2=0\}$ 组成的矩阵类, 我们将在双正交小波的构造中涉

及向量扩张中用到。

在小波分析中, 一个矩阵扩张的算法可陈述如下:

第一步: 找有限个矩阵 $U_i(\xi) \in \mathcal{N}$, $1 \le i \le L$, 使得

$$\widetilde{\alpha}(\xi) = U_1(\xi) \cdots U_L(\xi) \alpha(\xi)$$

是一个简单形式的向量。

我们暂时不具体讨论, 什么样的向量具有简单形式, 但有一点是确定的, 对简单向量可以进行下面的步骤。

第二步: 扩张 $\widetilde{\alpha}(\xi)$ 到一个(满足某种性质的) $M \times M$ 矩阵 $G_0(\xi)$。

第三步: 定义 $G(\xi) = (U_L(\xi))^{-1} \cdots (U_1(\xi))^{-1} G_0(\xi)$。那么, $G(\xi)$ 的第一列就为 $\alpha(\xi)$。由此, 我们就可以得到一个矩阵扩张。

现在我们来具体讨论上面的一般矩阵扩张方法, 使矩阵扩张为酉扩张。此时我们取

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \Big\{ P: P\text{是实系数正交矩阵} \Big\} \\ &\bigcup \Big\{ \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\xi}, \cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{M-1}\xi}): k_0, \cdots, k_{M-1} \in \mathbb{Z} \Big\} \text{ 。} \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

任选一个由三角多项式所组成的且满足 $(\alpha(\xi))^T \overline{\alpha(\xi)} = I$ 的向量 $\alpha(\xi)$, 我们需要找 (3.3.26) 中的矩阵 $U_i(\xi)$, $1 \le i \le L$, 使得

$$U_1(\xi) \cdots U_L(\xi) \alpha(\xi) = (1, 0, \cdots, 0)^T \text{ 。} \tag{3.3.27}$$

为此对任一三角多项式 $\alpha(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^M$, 我们定义 $\alpha_j \ne 0$ 的极大指数和极小指数之差为它的相对次数, 并记

为 $\deg(\alpha(\xi))$。例如, $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi},1)^T$ 的相对次数是 1, 而 $(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})^T$ 的相对次数为 0。

现在证明 (3.3.27)。当 $\deg(\alpha(\xi)) = 0$ 时, 存在 $k \in \mathbb{Z}$ 和一个单位向量 $\beta \in \mathbb{R}^M$ 使得 $\alpha(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\beta$。此时, 取正交数值矩阵 $U_1(\xi)$, 使得 $U_1(\xi)\beta = (1,0,\cdots,0)^T$ 和单项式矩阵 $U_2(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}I$ 就得到 (3.3.27)。现在我们只要在 $\deg(\alpha(\xi)) > 0$ 时, 找两个 $\mathcal{N}$ 中的矩阵 $U_1(\xi)$ 和 $U_2(\xi)$ 使得

$$\deg\left(U_1(\xi)U_2(\xi)\alpha(\xi)\right) < \deg(\alpha(\xi)) \tag{3.3.28}$$

即可。为找 $\mathcal{N}$ 中的矩阵 $U_1(\xi)$ 和 $U_2(\xi)$, 我们需要利用 $\alpha(\xi)$ 的性质。记

$$\alpha(\xi) = \sum_{j=k_1}^{k_2} \alpha_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$$

且 $\alpha_{k_1},\alpha_{k_2} \neq 0$。由 $\alpha(\xi)^T\overline{\alpha(\xi)} = 1$ 知, 当 $k_1 \neq k_2$ 时, 即 $\deg(\alpha(\xi)) \neq 0$ 时,

$$\alpha_{k_1}^T\alpha_{k_2} = 0\text{ 。} \tag{3.3.29}$$

从而存在一个正交矩阵 P 使得 $P\alpha_{k_1} = (\|\alpha_{k_1}\|,0,\cdots,0)^T$ 和 $P\alpha_{k_2} = (0,\cdots,0,\|\alpha_{k_2}\|)^T$, 在此 $\|\cdot\|$ 表示向量的模。我们可以看到: $\mathrm{diag}(1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})P\alpha(\xi)$ 可写为 $\sum_{j=k_1}^{k_2^*}\alpha_j^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 而 $k_2^* \leq k_2-1$ 所以 $\deg(\mathrm{diag}(1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})P\alpha(\xi)) < k_2-k_1 = \deg(\alpha(\xi))$, 这就完成了 (3.3.27) 的证明, 也同时完成了矩阵扩张的第一步。

经过第一步的简化处理后, 我们得到的简单形式是单位向量 $(1,0,\cdots,0)^T$。从而, 对这样的一个简单形式, 自然的矩阵扩张是单位矩阵, 这就是我们的第二步。此时第三步就很自然了。这就完成了紧支撑小波的构造。

3.4 半正交小波分解

如果 $L^2(\mathbb{R})$ 函数 ψ_s, $1 \le s \le M-1$, 具有下列性质:

(i) $\{\psi_{s,j,k} := M^{j/2}\psi_s(M^j \cdot - k) : 1 \le s \le M-1,\ j,k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的 *Riesz* 基;

(ii) 对所有 $j \ne j'$, $1 \le s, s' \le M-1$ 和 $k, k' \in \mathbb{Z}$, 成立

$$\langle \psi_{s,j,k}, \psi_{s',j',k'} \rangle = 0,$$

我们称 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{M-1}$ 为一组半正交小波。

在本节中, 我们将讨论怎样从一个多分辨分析来构造半正交小波。

定理 3.4.1 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个多分辨分析, $\phi \in L^1 \cap L^2$ 是它的一个尺度函数, 且满足下列细分方程

$$\phi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\phi(M \cdot - j), \qquad \widehat{\phi}(0) = 1, \tag{3.4.1}$$

在此$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c(j)| < \infty$。如果 $\psi_s \in V_1$, $1 \le s \le M-1$, 可写为

$$\psi_s = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_s(j)\phi(M \cdot - j), \tag{3.4.2}$$

其中$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_s(j)| < \infty$。定义

$$\Phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi j)|^2 。$$

那么当下式成立

$$\sum_{l=0}^{M-1} H_s\left(\xi + \frac{2\pi l}{M}\right) \overline{H_0\left(\xi + \frac{2\pi l}{M}\right)} \Phi\left(\xi + \frac{2\pi l}{M}\right) = 0, \tag{3.4.3}$$

且矩阵

$$\left(\sum_{l=0}^{M-1} H_s\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)\overline{H_t\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)}\Phi\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)\right)_{1\le s,t\le M-1} \tag{3.4.4}$$

非奇异时, ψ_s, $1 \le s \le M-1$, 是半正交小波。在此, 类似于定理3.3.1 我们定义

$$H_0(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$$

和

$$H_s(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_s(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \qquad 1\le s\le M-1\text{。}$$

证明: 记 $W_0 = V_1 \ominus V_0$。类似于定理3.3.1 的证明, 我们知道 $\psi_s \in W_0$, $1 \le s \le M-1$。所以要让 ψ_s, $1 \le s \le M-1$ 是半正交小波, 我们只需证明 $\{\psi_s(\cdot - j), j \in \mathbb{Z}, 1 \le s \le M-1\}$ 是 $V_1 \ominus V_0$ 的 Riesz 基。为此, 我们作 Schmidt 正交化。定义新的 $\psi_1^{new}, \cdots, \psi_{M-1}^{new}$ 如下:

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_1^{new} = \widehat{\psi}_1\,, \\ \widehat{\psi}_s^{new}(\xi) = \widehat{\psi}_s(\xi)[\widehat{\psi}_1,\widehat{\psi}_1](\xi) - \widehat{\psi}_1(\xi)[\widehat{\psi}_s,\widehat{\psi}_1](\xi),\ 2\le s\le M-1, \end{cases} \tag{3.4.5}$$

其中 $[\widehat{f},\widehat{g}](\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(\xi+2\pi j)\overline{\widehat{g}(\xi+2\pi j)}$。不难验证

$$[\widehat{\psi}_s^{new},\widehat{\psi}_1^{new}] = [\widehat{\psi}_1,\widehat{\psi}_1]\cdot[\widehat{\psi}_s,\widehat{\psi}_1] - [\widehat{\psi}_1,\widehat{\psi}_1]\cdot[\widehat{\psi}_s,\widehat{\psi}_1] = 0,$$

即, $\widehat{\psi}_1^{new}$ 与 $\widehat{\psi}_s^{new}$, $2 \le s \le M-1$, 是相互垂直的。另一方面, 由于

$$[\widehat{\psi}_s, \widehat{\psi}_s](\xi) = \sum_{l=0}^{M-1} H_s\left(\xi + \frac{2\pi l}{M}\right) \overline{H_s\left(\xi + \frac{2\pi l}{M}\right)} \Phi\left(\xi + \frac{2\pi l}{M}\right),$$

有界。从而

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1^{new}(\xi) \\ \widehat{\psi}_2^{new}(\xi) \\ \vdots \\ \widehat{\psi}_{M-1}^{new}(\xi) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & [\widehat{\psi}_s, \widehat{\psi}_1](\xi) & \cdots & [\widehat{\psi}_{M-1}, \widehat{\psi}_1](\xi) \\ 0 & [\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_1](\xi) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_1](\xi) \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1(\xi) \\ \widehat{\psi}_2(\xi) \\ \vdots \\ \widehat{\psi}_{M-1}(\xi) \end{pmatrix} \\
&= A(\xi) \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1(\xi) \\ \widehat{\psi}_2(\xi) \\ \vdots \\ \widehat{\psi}_{M-1}(\xi) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

且 $A(\xi)$ 可逆, $A(\xi)$ 和 $(A(\xi))^{-1}$ 都是 2π 周期的有界矩阵。由假设 (3.4.4) 知, $\left(\widehat{\psi}_1^{new}(\xi), \widehat{\psi}_2^{new}(\xi), \cdots, \widehat{\psi}_{M-1}^{new}(\xi)\right)$ 所对应的矩阵 $\left([\widehat{\psi}_s^{new}, \widehat{\psi}_t^{new}](\xi)\right)$ 是 2π 周期、有界、可逆且逆也有界的矩阵。重复上述正交化过程, 我们最后得到一组 $\widetilde{\psi}_s$, $1 \leq s \leq M-1$, 使得

$$\left[\widehat{\widetilde{\psi}}_s, \widehat{\widetilde{\psi}}_t\right](\xi) = 0, \qquad 1 \leq s \neq t \leq M-1 \text{。}$$

最后再定义 ψ_s^* 为

$$\widehat{\psi}_s^*(\xi) = \frac{\widehat{\widetilde{\psi}}_s(\xi)}{\sqrt{\big[\widehat{\widetilde{\psi}}_s, \widehat{\widetilde{\psi}}_s\big](\xi)}} \quad 。$$

那么

$$\big[\widehat{\psi}_s^*, \widehat{\psi}_t^*\big](\xi) = \delta_{s,t}, \qquad 1 \le s, t \le M-1,$$

且存在一个有界、可逆且逆也为有界的 2π 周期函数所组成的矩阵 $A(\xi)$, 使得

$$\begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1(\xi) \\ \widehat{\psi}_2(\xi) \\ \vdots \\ \widehat{\psi}_{M-1}(\xi) \end{pmatrix} = A(\xi) \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1^*(\xi) \\ \widehat{\psi}_2^*(\xi) \\ \vdots \\ \widehat{\psi}_{M-1}^*(\xi) \end{pmatrix} 。$$

此时, 我们用 $\psi_1^*, \cdots, \psi_{M-1}^*$ 替代 $\psi_1, \cdots, \psi_{M-1}$。这样, 他们的整平移用 ℓ^2 序列组合的线性空间是一样的, 但有一点不同。这时, $\psi_1^*, \cdots, \psi_{M-1}^*$ 的整平移是空间的正交基。定义 ϕ^* 为

$$\widehat{\phi}^*(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)/[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi)^{1/2}$$

那么 $\big(\phi_0^*, \psi_1^*, \cdots, \psi_{M-1}^*\big)$ 的整平移为 V_1 的正交基。结论可类似于定理3.3.1 的证明得到。在此, 我们不说由定理3.3.1 直接得到, 是因为此时定义的 ϕ^* 与 $\psi_1^*, \cdots, \psi_{M-1}^*$ 所对应的 (3.4.1) 和 (3.4.2) 表达式中的序列 $\{c(j)\}$ 和 $\{c_s(j)\}$ 可能不是 ℓ^1 序列, 而是 ℓ^2 序列。因此, 我们只需要作一些技术上的处理, 在此就不详述了。

□

从定理3.4.1看到, 关于多分辨分析构造半正交小波的问题, 实际上也被转化为矩阵的扩张问题。对(3.4.2)所定义的函数ψ_s, 若定义

$$W_{0,s}=\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}d_s(j)\psi_s(M\cdot-j):\sum_{j\in\mathbb{Z}}|d_s(j)|^2<\infty\right\}。\tag{3.4.6}$$

那么在ψ_s, $1\le s\le M-1$, 是半正交小波时, ψ_s的整平移也为$W_{0,s}$的Riesz基, 且$W_{0,s}$是$L^2(\mathbb{R})$中的一个闭子空间。在定理3.4.1的证明中, 我们事实上在做Schmidt正交化。它的一个重要优势是算法(3.4.5)保持了对称和反对称性。这个特点使得我们能够较一般的从有对称紧支撑尺度函数的多分辨分析来构造对称或反对称半正交小波基。对空间$W_{0,s}$来说, 我们希望$W_{0,s}$, $1\le s\le M-1$, 是相互正交的。那么, 这时关于$H_s(\xi)$和$H_0(\xi)$的条件(3.4.2)和(3.4.3)就转化为: 对所有$0\le s\ne t\le M-1$,

$$\sum_{l=0}^{M-1}H_s\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)\overline{H_t\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)}\Phi\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)=0,\tag{3.4.7}$$

和存在正常数$C_0>0$, 使得

$$C_0{}^{-1}\le\sum_{l=0}^{M-1}H_s\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)\overline{H_s\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)}\Phi\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)\le C_0\tag{3.4.8}$$

对一切$\xi\in\mathbb{R}$成立。

我们将不考虑一般的满足(3.4.7)和(3.4.8)的矩阵扩张问题。下面我们将只处理怎样从一个多分辨分析来构造对称或反对称的紧支撑半正交小波问题。

给定一个多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 设 ϕ 是它的紧支撑的尺度函数。由定理3.1.2, 我们不妨认为 ϕ 具有线性无关的整平移。由定理2.8.2 知, 如果存在 V_1 中对称或反对称的非零紧支撑函数, 那么 ϕ 是对称的。所以下面我们就假定 ϕ 是对称的。设 ϕ 所对应的细分方程为

$$\phi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_0(j)\phi(M\cdot - j)\text{。} \tag{3.4.9}$$

由 ϕ 的整平移线性无关性和紧支撑性可知: $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个有限长序列。另一方面, 由 ϕ 的对称性, 符号函数

$$H_0(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_0(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$$

是对称的, 即存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使得

$$H_0(-\xi) = \mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\xi}H_0(\xi)\text{。} \tag{3.4.10}$$

在多分辨分析中, 我们始终假定 $\phi\in L^2$。从而当 ϕ 有紧支撑时, ϕ 也属于 L^1。由定理2.8.2 知

$$H_0(0) = 1 \quad \text{和} \quad H_0\left(\frac{2\pi l}{M}\right) = 0, \qquad 1\le l\le M-1\text{。} \tag{3.4.11}$$

我们矩阵扩张的基本想法是: 先找 $M-1$ 个对称和反对称的三角多项式 $P_1(\xi),\cdots,P_{M-1}(\xi)$, 使得方阵

$$\left(H_0\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right), P_1\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right), \cdots, P_{M-1}\left(\xi+\frac{2\pi l}{M}\right)\right)_{0\le l\le M-1}$$

的行列式非零, 但它通常不具有 (3.4.7) 和 (3.4.8) 的性质。然而, 我们利用 Schmidt 正交化方法来最后得到满足 (3.4.7) 和 (3.4.8) 的

三角多项式 H_s, $1 \le s \le M-1$。

为找初始的三角多项式 $P_1(\xi), \cdots, P_{M-1}(\xi)$, 我们把 (3.4.10) 中的整数 k 分为奇、偶两种情形来讨论。为方便起见, 在以下两引理中我们用 $P_0(\xi)$ 来表示 $H_0(\xi)$。

引理 3.4.1 **设** ν **是一个整数,** $P_0(\xi)$ **是一个三角多项式且满足** $P_0(-\xi) = e^{2i\nu\xi}P_0(\xi)$, $P_0(0) = M$ **和** $P_0(\frac{2\pi l}{M}) = 0$, $1 \le l \le M-1$。**定义**

$$P_s(\xi) = \begin{cases} 2e^{-i\nu\xi}\cos s\xi\,, & 1 \le s \le [(M-1)/2]\,, \\ 2e^{-i\nu\xi}i\sin(s-M)\xi\,, & (M+1)/2 \le s \le M-1\,。\end{cases} \tag{3.4.12}$$

那么对 $\epsilon_s = \pm 1$ **成立**

$$P_s(-\xi) = \epsilon_s e^{2i\nu\xi}P_s(\xi), \qquad 0 \le s \le M-1, \tag{3.4.13}$$

且 $\left(P_s(\xi + \frac{2\pi t}{M})\right)_{0 \le s,t \le M-1}$ **的行列式非零。**

证明: (3.4.13)的验证是明显的。现研究 $\left(P_s(\xi+\frac{2\pi t}{M})\right)_{0\le s,t\le M-1}$ 在 M 是偶数时的行列式。记

$$e^{i\nu\xi}P_0(\xi) = \sum_{t=-M/2}^{M/2-1} e^{it\xi}P_{0,t}(M\xi)\,。$$

那么

$$P_{0,t}(0) = 1, \qquad -M/2 \le t \le M/2-1\,。$$

从 $P_s(\xi)$ 的构造知

$$\begin{cases} P_{M/2}(\xi) = (1-e^{iM\xi})e^{-i(\nu+M/2)\xi}\,, \\ P_s(\xi) + P_{M-s}(\xi) = 2e^{-i(s+\nu)\xi}\,, \\ P_s(\xi) - P_{M-s}(\xi) = 2e^{-i(\nu-s)\xi}, \qquad 1 \le s \le M/2-1\,。\end{cases}$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\det\left(P_s(\xi+2\pi t/M)\right)_{0\le s,t\le M-1}\\
&=C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu M\xi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\xi})\det[(P_0(\xi+2\pi t/M),\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{M}{2}(\xi+2\pi t/M)},\cdots,\\
&\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi+2\pi t/M)},\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi+2\pi t/M)},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(M/2-1)(\xi+2\pi t/M)})_{0\le t\le M-1}]\\
&=C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu M\xi}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\xi})P_{0,0}(M\xi)\det\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi+\frac{2\pi t}{M})}\Big)_{-\frac{M}{2}\le s\le\frac{M}{2}-1\,,\,0\le t\le M-1}\\
&\ne 0
\end{aligned}
$$

其中 C_1 和 C_2 是非零常数, 最后一个不等式成立的原因是由于 $\det\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(\xi+2\pi t/M)}\right)_{-M/2\le s\le M/2-1\,,\,0\le t\le M-1}$ 是一个 Vandermonde 行列式。

当 M 为奇数情形时, 类似地有 $\det\left(P_s(\xi+2\pi t/M)\right)_{0\le s,t\le M-1}$ 是非零三角多项式。□

引理 3.4.2 **设** ν **是一个整数**, $P_0(\xi)$ **是一个三角多项式, 且满足** $P_0(-\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\nu+1)\xi}P_0(\xi)$, $P_0(0)=M$ **和** $P_0(2\pi l/M)=0$, $1\le l\le M-1$。**当** M **是偶数时, 定义**

$$
P_s(\xi)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s+1+\nu)\xi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s-\nu)\xi}, & 1\le s\le\frac{M}{2}-1\,,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(M-s+\nu)\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s+1-M+\nu)\xi}, & \frac{M}{2}\le s\le M-1,\end{cases}\tag{3.4.14}
$$

而当 M **是奇数时, 定义**

$$
P_s(\xi)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s+\nu)\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-s+\nu)\xi}, & 1\le s\le\frac{M-1}{2}\,,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(M-s+\nu)\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s+1-M+\nu)\xi}, & \frac{M+1}{2}\le s\le M-1\,。\end{cases}\tag{3.4.15}
$$

那么

$$
P_s(-\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\nu+1)\xi}\epsilon_sP_s(\xi),\qquad \epsilon_s=\pm1,
$$

以及 $\det\left(P_s(\xi+2\pi t/M)\right)_{0\le s,t\le M-1}$ **为非零三角多项式。**

类似于引理3.4.1, 我们可以证明上述引理。在此就不详细验证了。

从引理3.4.1 和引理3.4.2看到, 对任意满足 (3.4.10) 和 (3.4.11) 的三角多项式, 由 (3.4.12), (3.4.14) 和 (3.4.15) 可找到三角多项式 $P_s(\xi), 1\le s\le M-1$, 使得

$$P_s(-\xi)=\epsilon_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}P_s(\xi), \qquad 1\le s\le M-1,\, \epsilon_s=\pm 1, \quad (3.4.16)$$

且

$$\det\left(H_0\left(\xi+\frac{2\pi t}{M}\right), P_1\left(\xi+\frac{2\pi t}{M}\right), \cdots, P_{M-1}\left(\xi+\frac{2\pi t}{M}\right)\right)_{0\le t\le M-1}$$

$$\neq 0, \qquad (3.4.17)$$

这是我们构造的第一步。

为利用 Schmidt 正交化, 我们需要引入一个新记号: 设 G 为三角多项式且满足 $G(\xi) = G(-\xi)$, 对任意的两个三角多项式 P, Q 定义它们的斜内积

$$[P,Q]_G(\xi)=\sum_{t=0}^{M-1} P\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)\overline{Q\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)}G\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right) 。$$

容易验证下面的 Schmidt 正交化保留了对称性和反对称性。

引理 3.4.3 **设三角多项式** G **满足**

$$G(\xi)=G(-\xi), \qquad G(\xi)>0, \quad \forall\, \xi\in\mathbb{R} 。 \qquad (3.4.18)$$

如果 Q_1, Q_2 为三角多项式且存在 $\alpha \in \mathbb{Z}$, 使得

$$Q_s(-\xi) = \epsilon_s e^{-i\alpha\xi} Q_s(\xi), \qquad \epsilon_s = \pm 1\,。$$

定义

$$\widetilde{Q}_2(\xi) = [Q_1, Q_1]_G(M\xi) Q_2(\xi) - [Q_1, Q_2]_G(M\xi) Q_1(\xi)\,。$$

那么 $\widetilde{Q}_2(-\xi) = \epsilon_2 e^{-i\alpha\xi} \widetilde{Q}_2(\xi)$ 和 $[Q_1, \widetilde{Q}_2]_G(\xi) = 0$。

对满足 (3.4.16) 和 (3.4.17) 的三角多项式作 Schmidt 正交化, 我们就能得到一组新的三角多项式 $Q_1(\xi), \cdots, Q_{M-1}(\xi)$ 使得:

$$\begin{cases} Q_s(-\xi) = \epsilon_s \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi} Q_s(\xi)\,, & \\ [Q_s, Q_t]_\Phi(\xi) = 0\,, & 1 \le s \ne t \le M-1\,, \\ [Q_s, H_0]_\Phi(\xi) = 0\,, & 1 \le s \le M-1。 \end{cases} \tag{3.4.19}$$

以及

$$\det\left(H_0\left(\xi + \frac{2\pi t}{M}\right), Q_1\left(\xi + \frac{2\pi t}{M}\right), \cdots, Q_{M-1}\left(\xi + \frac{2\pi t}{M}\right)\right) \ne 0\,。 \tag{3.4.20}$$

在此, 2π 周期函数 $\Phi(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+2\pi j)|^2$ 显然满足 (3.4.18)。我们需要指出的是, 正是由于条件 (3.4.18) 保证了对任意非零实系数三角多项式 Q_1 成立 $[Q_1, Q_1]_G(\xi) > 0$。从而我们可以得到 (3.4.20)。

比较 Q_s, $1 \le s \le M-1$, 满足 (3.4.19) 和 (3.4.20) 与我们所希望的 H_s, $1 \le s \le M-1$, 的条件 (3.4.7) 和 (3.4.8), 只差条件 (3.4.8) 了。为此我们需要去掉 Q_s, $1 \le s \le M-1$ 中的 M 对称零点。也就是说

$$Q_s(\xi) = Q_{1,s}(\xi) Q_{2,s}(M\xi), \qquad 1 \le s \le M-1,$$

使得 $Q_{1,s}, Q_{2,s}$ 为三角多项式且 $Q_{1,s}$ 没有 M 对称零点, 即不存在 $\xi_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $Q_{1,s}(\xi_0 + 2\pi t/M) = 0$ 对所有 $0 \leq t \leq M-1$ 成立。定义

$$H_s(\xi) = Q_{1,s}(\xi), \qquad 1 \leq s \leq M-1\text{。} \tag{3.4.21}$$

那么

$$\sum_{t=0}^{M-1} |H_s(\xi + 2\pi t/M)|^2 > 0\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}\text{。}$$

同时, 我们可以验证, 由上述所定义的三角多项式 $H_s(\xi)$, 满足 (3.4.7) 和 (3.4.8)。在此, 我们指出这样定义的 $H_s(\xi)$ 所对应的对称性和反对称性可能与 $Q_s(\xi)$ 的对称性和反对称性不同。明确地说, 可能发生这样的情形: Q_s 是对称的, 但 H_s 是反对称的, 反之亦然。

3.5 双正交小波分解

设 $\Psi = \{\psi_1, \cdots, \psi_{M-1}\}$ 和 $\widetilde{\Psi} = \{\widetilde{\psi}_1, \cdots, \widetilde{\psi}_{M-1}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的两组函数。当

$$\mathcal{F} = \{M^{j/2}\psi_s(M^j \cdot -k) : 1 \leq s \leq M-1,\, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

和

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{M^{j/2}\widetilde{\psi}_s(M^j \cdot -k) : 1 \leq s \leq M-1,\, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

所组成的对子 $(\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{F}})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的双正交基时, 则称 $\Psi, \widetilde{\Psi}$ 为双正交小波。对于双正交小波 Ψ 和 $\widetilde{\Psi}$, 任何函数 f 都有惟一的表示

$$f = \sum_{s=1}^{M-1} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{s,j,k}\rangle \widetilde{\psi}_{s,j,k} = \sum_{s=1}^{M-1} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{s,j,k}\rangle \psi_{s,j,k},$$

且存在正常数 C_1 和 C_2, 使得

$$C_1^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{s=1}^{M-1} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{s,j,k}\rangle|^2 \le C_1\|f\|^2$$

和

$$C_2^{-1}\|f\|^2 \le \sum_{s=1}^{M-1} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \widetilde{\psi}_{s,j,k}\rangle|^2 \le C_2\|f\|^2,$$

这里, 我们采用通用的符号

$$\psi_{s,j,k} = M^{j/2}\psi_s(M^j\cdot -k) \quad 和 \quad \widetilde{\psi}_{s,j,k} = M^{j/2}\widetilde{\psi}_s(M^j\cdot -k)。$$

在本节中我们不准备讨论一般的双正交小波基的构造, 而仅讨论如何从双正交多分辨分析来构造紧支撑的双正交小波的问题。如果两个多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 分别存在, 它们所对应的尺度函数 ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 满足

$$\langle \phi(\cdot - k), \widetilde{\phi}(\cdot - k')\rangle = \delta_{k,k'}, \qquad k, k' \in \mathbb{Z}, \tag{3.5.1}$$

我们就称之为双正交多分辨分析。此时, 尺度函数 $\phi, \widetilde{\phi}$ 被称为双正交尺度函数。从双正交多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 来构造双正交小波的基本想法是: 寻找函数 $\psi_s \in W_0 := \widetilde{V}_0^{\perp} \cap V_1$ 和 $\widetilde{\psi}_s \in \widetilde{W_0} := V_0^{\perp} \cap \widetilde{V}_1$, $1 \le s \le M-1$, 使得它们的整平移分别为 W_0 和 $\widetilde{W_0}$ 的 Riesz 基, 且满足

$$\langle \psi_s(\cdot - k), \widetilde{\psi}_t(\cdot - k')\rangle = \delta_{s,t}\delta_{k,k'}, \quad 1 \le s, t \le M-1,\ k, k' \in \mathbb{Z}。 \tag{3.5.2}$$

当 $\psi_s \in W_0$ 和 $\widetilde{\psi}_s \in \widetilde{W_0}$ 满足 (3.5.2) 时, 容易从双正交多分辨分析的性质验证, 它们就为一组双正交小波。由其构造可知 $\psi_s \in V_1$ 和 $\widetilde{\psi}_s \in \widetilde{V}_1$。我们可以表示 ψ_s 和 $\widetilde{\psi}_s$ 为

$$\begin{cases} \psi_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_s(k)\phi(M\cdot -k)\,, \\ \widetilde{\psi}_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{d}_s(k)\widetilde{\phi}(M\cdot -k), \end{cases} \tag{3.5.3}$$

而序列 $\{d_s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{d}_s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 ℓ^2 序列。为方便起见, 在构造过程中, 我们只构造 $\{d_s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{d}_s(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 ℓ^1 序列的双正交小波 ψ_s 和 $\widetilde{\psi}_s$, $1 \le s \le M-1$。定义双正交小波滤波函数 H_s 和 $\widetilde{H}_s$, $1 \le s \le M-1$ 为

$$\begin{cases} H_s(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_s(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,, \\ \widetilde{H}_s(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{d}_s(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\ 。 \end{cases}$$

则 $\psi_s, \widetilde{\psi}_s$ 的双正交条件 (3.5.2) 等价于

$$\sum_{t=0}^{M-1} H_s(\xi+2\pi t/M)\overline{\widetilde{H}_{s'}(\xi+2\pi t/M)} = \delta_{s,s'}\,, \quad 1 \le s, s' \le M-1\ 。 \tag{3.5.4}$$

另一方面, ψ_s 和 $\widetilde{\psi}_s$ 分别属于 W_0 和 $\widetilde{W}_0$ 的充分必要条件是:

$$\sum_{t=0}^{M-1} H_0(\xi+2\pi t/M)\overline{\widetilde{H}_s(\xi+2\pi t/M)} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{3.5.5}$$

和

$$\sum_{t=0}^{M-1} H_s(\xi+2\pi t/M)\overline{\widetilde{H}_0(\xi+2\pi t/M)} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.5.6}$$

其中 $H_0(\xi),\widetilde{H}_0(\xi)$ 分别为尺度函数 ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 所对应的符号函数, 即

$$\widehat{\phi}(\xi)=H_0(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M) \quad 和 \quad \widehat{\widetilde{\phi}}(\xi)=\widetilde{H}_0(\xi/M)\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi/M)\text{。} \tag{3.5.7}$$

综合上面的分析, 我们有下面的结论。

定理 3.5.1 **设** $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ **和** $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ **为一对双正交多分辨分析, ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 分别是它们的双正交尺度函数且满足** (3.5.1)。**如果有界的** 2π **周期函数** H_s **和** $\widetilde{H}_s$, $1\le s\le M-1$, **满足** (3.5.4)~(3.5.6)。**那么由** (3.5.3)**所定义的** $L^2(\mathbb{R})$ **函数** ψ_s **和** $\widetilde{\psi}_s$, $1\le s\le M-1$ **是一对双正交小波。**

当 $H_0(\xi),\widetilde{H}_0(\xi)$ 分别为尺度函数 ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 的符号函数时, 从双正交条件 (3.5.1) 我们得到

$$\sum_{t=0}^{M-1}H_0(\xi+2\pi t/M)\overline{\widetilde{H}_0(\xi+2\pi t/M)}=1, \qquad \xi\in\mathbb{R}\text{。} \tag{3.5.8}$$

记

$$\mathcal{H}(\xi)=(H_s(\xi+2\pi t/M))_{0\le s,t\le M-1}$$

和

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\xi)=\left(\widetilde{H}_s(\xi+2\pi t/M)\right)_{0\le s,t\le M-1}\text{。}$$

我们可以把 (3.5.4)~(3.5.8) 写成

$$\mathcal{H}(\xi)\overline{\widetilde{\mathcal{H}}(\xi)}^T=I\text{。}$$

从双正交的多分辨分析来构造双正交小波, 与前面构造正交和半正交小波一样, 可以转化为矩阵的扩张问题。为方便起见,

我们还是利用多相位分解的办法。分别记

$$H_s(\xi) = \sum_{t=0}^{M-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi} H_{s,t}(M\xi) \tag{3.5.9}$$

和

$$\widetilde{H}_s(\xi) = \sum_{t=0}^{M-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi} \widetilde{H}_{s,t}(M\xi) 。 \tag{3.5.10}$$

那么条件 (3.5.4)~(3.5.8) 就等价于

$$\sum_{t=0}^{M-1} H_{s,t}(\xi)\overline{\widetilde{H}_{s',t}(\xi)} = \frac{1}{M}\delta_{s,s'}, \quad 0 \le s, s' \le M-1 。 \tag{3.5.11}$$

所以, 给定 $H_0(\xi)$ 和 $\widetilde{H}_0(\xi)$ 而找 $H_s(\xi)$ 和 $\widetilde{H}_s(\xi)$, $1 \le s \le M-1$, 的问题可以转化为下列的矩阵扩张问题:

给定两个由有界 2π 周期函数所生成且满足

$$a(\xi)^T\overline{b(\xi)} = 1 \tag{3.5.12}$$

的 M 维向量 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$, 找两个由有界 2π 周期函数所生成的 $M \times M$ 维方阵 $A(\xi)$ 和 $B(\xi)$, 使得

$$A(\xi)^T\overline{B(\xi)} = I \tag{3.5.13}$$

成立且 $A(\xi), B(\xi)$ 的第一列分别为 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$。

对任给满足 (3.5.12) 的两个三角多项式 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$, 我们在下面将给出一个方法来构造三角多项式所组成的方阵$A(\xi)$和$B(\xi)$, 使得 $a(\xi), b(\xi)$ 分别为 $A(\xi)$, $B(\xi)$ 的第一行, 且 $A(\xi)$ 和 $B(\xi)$ 满足 (3.5.13)。

对向量值三角多项式 $a(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, $a_j \in \mathbb{R}^M$, 定

义由其 Fourier 系数 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 所生成的线性空间为 $\mathcal{L}(a)$, 而它的亏格 $\mathrm{gen}(a)$ 定义为满足 $a_j \neq 0$ 的最大指标和最小指标的差。对两个向量值三角多项式 $a(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 和 $b(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 定义 $a(\xi)$ 相对于 $b(\xi)$ 的亏格 $\mathrm{gen}_b(a)$ 为

$$\mathrm{gen}_b(a) = \min\{\mathrm{gen}(c) :\, \mathcal{L}(a-c) \subset \mathcal{L}(b)^{\perp}\}\text{。}$$

这里我们仍采用通用符号 $V^{\perp}$ 表示线性空间 V 的正交补。再定义

$$C(a,b) = \left(b_j^T a_{j'}\right)_{j,j'\in\mathbb{Z}}$$

并记 $R(a,b)$ 为矩阵 $C(a,b)$ 的秩。选取

$$\mathcal{N}(a,b) = \left\{I + (z^k - 1)uw^T :\, u \in \mathcal{L}(a),\, w \in \mathcal{L}(b),\, w^T u = 0\right\}\text{。}$$

我们将证明下面的定理:

定理 3.5.2 **设** $a(\xi), b(\xi)$ **为两个向量值三角多项式, 且满足**

$$a(\xi)^T\overline{b(\xi)} = 1\text{。}$$

那么存在 $m \in \mathbb{Z}$ **和** $U_i \in \mathcal{N}(a,b)$, $1 \le i \le d$, **使得**

$$\begin{cases} a(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi} U_d(\xi)\cdots U_1(\xi)a(1)\,, \\ b(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}\overline{U_d(\xi)}^T\cdots\overline{U_1(\xi)}^T b(1)\text{。} \end{cases}$$

利用数值向量 $a(1)$ 和 $b(1)$ 的扩张, 我们就能找到 $a(\xi), b(\xi)$ 的扩张 $A(\xi)$ 和 $B(\xi)$, 使得 $\overline{B(\xi)}^T A(\xi) = I$。

为证明定理3.5.2, 我们先建立如下两个引理。

引理 3.5.1 设 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 如定理3.5.2所述。那么存在 $\alpha_i \in \mathcal{L}(a), \beta_i \in \mathcal{L}(b)$ 和三角多项式 $H_i(\xi)$, $1 \le i \le N := R(a,b)$, 使得

$$\alpha_j^T \beta_{j'} = \delta_{j,j'}, \qquad 1 \le j, j' \le N, \tag{3.5.14}$$

$$\mathcal{L}(a - \sum_{i=1}^{N} H_i \alpha_i) \subset \mathcal{L}(a) \cap \mathcal{L}(b)^{\perp}, \tag{3.5.15}$$

和

$$\operatorname{gen}\left(\sum_{i=1}^{N} H_i \alpha_i\right) = \operatorname{gen}_b(a)\text{ 。} \tag{3.5.16}$$

反之, 如果存在 $\alpha_i \in \mathcal{L}(a)$ 和三角多项式 H_i, $1 \le i \le N'$, 使得 $\mathcal{L}(a - \sum_{i=1}^{N'} H_i \alpha_i) \subset \mathcal{L}(b)^{\perp}$, 那么

$$R(a,b) \le N'\text{ 。} \tag{3.5.17}$$

证明: 记 $a(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 和 $b(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$, 并取 $i_1 < i_2 < \cdots < i_N$ 和 $j_1 < j_2 < \cdots < j_N$ 使得

$$B = \left(b_{i_l}^T a_{j_k}\right)_{1 \le l,k \le N}$$

是一个满秩矩阵。记 B 的逆为 $(c_{k,l})_{1\le k,l\le N}$。那么我们取 $\alpha_l = a_{i_l}, 1 \le l \le N$ 和 $\beta_k = \sum_{l=1}^{N} c_{k,l} b_{i_l}$ 即可。

由 $R(a,b)$ 的定义和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 的构造过程, 我们不难看到 $\left(b_j^T \alpha_i\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ $1 \le i \le N$ 是线性无关的向量。从而存在实数 $d_{ii'}$, 使得

$$b_j^T a_{i'} = \sum_{i=1}^{N} d_{ii'} b_j^T \alpha_i,$$

并且 $a_{i'} - \sum_{i=1}^{N} d_{ii'} \alpha_i \in \mathcal{L}(a) \cap \mathcal{L}(b)^{\perp}$。那么 $H_k(\xi) = \sum_{j'\in\mathbb{Z}} d_{kj'} e^{-ij'\xi}$, $1 \le k \le N$, 便满足 (3.5.15)。

注意到 α_k, $1 \le k \le N$, 的构造, 我们知道 $\sum_{k=1}^N d_k\alpha_k \in \mathcal{L}(b)^\perp$ 的充分必要条件是: $d_k = 0$, 对所有 $1 \le k \le N$ 成立。由此,

$$\operatorname{gen}\left(\sum_{k=1}^N H_k\alpha_k\right) = \operatorname{gen}_b\left(\sum_{k=1}^N H_k\alpha_k\right)\text{。}$$

这与 (3.5.15) 结合起来就证明了 (3.5.16)。

记 $H_k(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_{k,j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。那么 (3.5.17) 显然可以从

$$C(a,b) = \left(b_i^T\alpha_k\right)_{i\in\mathbb{Z},1\le k\le N'} \times \left(h_{kj}\right)_{1\le k\le N',j\in\mathbb{Z}}$$

得到。 □

引理 3.5.2 设 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 如定理3.5.2所述。如果进一步假设存在 $\alpha \in \mathcal{L}(a)$ 和三角多项式 $H(\xi)$ 以及 $\widetilde{a}_j \in \mathcal{L}(a)\cap\mathcal{L}(b)^\perp$, $j \in \mathbb{Z}$, 使得

$$a(\xi) = H(\xi)\alpha + \sum_{j\in\mathbb{Z}}\widetilde{a}_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\text{。} \tag{3.5.18}$$

那么存在 $U_i(\xi) \in \mathcal{N}(a,b)$ 和 $m \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\begin{cases} a(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}U_d(\xi)\cdots U_1(\xi)a(1)\,, \\ b(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}\overline{U_d(\xi)}^T\cdots\overline{U_1(\xi)}^T b(1)\text{。} \end{cases} \tag{3.5.19}$$

证明: 把 $a(\xi)$ 的表达式 (3.5.18) 代入 $a(\xi)^T\overline{b(\xi)} = 1$, 并利用 $\widetilde{a}_j \in \mathcal{L}(b)^\perp$, 得知

$$1 = a(\xi)^T\overline{b(\xi)} = H(\xi)\alpha^T\overline{b(\xi)}\text{。}$$

因此, $H(\xi)$ 是一单项式, 即 $H(\xi) = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j_0\xi}$, $C \in \mathbb{R}$, $j_0 \in \mathbb{Z}$。不失一般性, 不妨认为 $j_0 = 0$ 和 $C = 1$。否则, 只要取新的 α 和

对$a(\xi)$ 和$b(\xi)$ 同时乘 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j_0\xi}$。由 $H(\xi)=1$, 把 $b(\xi)$ 写成 $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} b_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 时, 我们有

$$b_j^T\alpha=\delta_{j,0}\,, \tag{3.5.20}$$

从而矩阵 $U_j(\xi)=I-(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}-1)\widetilde{a}_jb_0^T$, $j_a\le j\le J_a$, 属于 $\mathcal{N}(a,b)$。这里, 整数 j_a 和 J_a 分别为满足 $\widetilde{a}_j\neq 0$ 的极小和极大指标。此时, 新的向量值三角多项式 $\widetilde{a}(\xi)$ 和 $\widetilde{b}(\xi)$

$$\begin{cases} \widetilde{a}(\xi)=U_{j_a}(\xi)\cdots U_{J_a}(\xi)a(\xi)\,, \\ \widetilde{b}(\xi)=\overline{U_{j_a}(\xi)}^T\cdots\overline{U_{J_a}(\xi)}^T b(\xi), \end{cases} \tag{3.5.21}$$

仍然满足

$$\widetilde{a}(\xi)^T\overline{\widetilde{b}(\xi)}=1\ 。 \tag{3.5.22}$$

此外,

$$\widetilde{a}(\xi)=a(\xi)-\sum_{j=j_a}^{J_a}\widetilde{a}_j(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}-1)=a(1) \tag{3.5.23}$$

和

$$\mathcal{L}(\widetilde{b})<\mathcal{L}(b)\ 。 \tag{3.5.24}$$

记 $\widetilde{b}(j)=\sum_{j=j_{\widetilde{b}}}^{J_{\widetilde{b}}}\widetilde{b}_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。由 (3.5.22) 和 (3.5.23) 知 $\widetilde{b}_j^Ta(1)=\delta_{j,0}$。因此矩阵

$$U_j(\xi)=I+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}-1)a(1)\widetilde{b}_j^T\in\mathcal{N}(a,\widetilde{b})\subset\mathcal{N}(a,b),\quad j_{\widetilde{b}}\le j\le J_{\widetilde{b}}\ 。$$

另一方面, 我们可以验证

$$U_{j_{\widetilde{b}}}(\xi)\cdots U_{J_{\widetilde{b}}}(\xi)\widetilde{a}(\xi)=U_{j_{\widetilde{b}}}(\xi)\cdots U_{J_{\widetilde{b}}}(\xi)a(1)=a(1)$$

和

$$\overline{U_{j_{\widetilde{b}}}(\xi)}^T \cdots \overline{U_{J_{\widetilde{b}}}(\xi)}^T \widetilde{b}(\xi) = \widetilde{b}(\xi) - \sum_{j=j_{\widetilde{b}}}^{J_{\widetilde{b}}} \widetilde{b}_j(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} - 1) = b(1)\text{。}$$

这便完成了引理的证明。 □

有了引理3.5.1和引理3.5.2, 我们可以开始证明定理3.5.2。

定理3.5.2的证明: 我们的证明是采用关于$R(a,b)$和$\mathrm{gen}_b(a)$的双重归纳法。当$R(a,b)=1$时, 由引理3.5.1, 存在三角多项式$H(\xi)$, 向量$\alpha\in\mathcal{L}(a)$和向量值三角多项式$\widetilde{a}(\xi)$, 使得

$$a(\xi) = H(\xi)\alpha + \widetilde{a}(\xi) \quad 和 \quad \mathcal{L}(\widetilde{a}) \subset \mathcal{L}(a)\cap\mathcal{L}(b)^{\perp}\text{。}$$

因此$R(a,b)=1$的结论由引理3.5.2得到。

当$\mathrm{gen}_b(a)=0$时, 由$\mathrm{gen}_b(a)$的定义知

$$a(\xi) = c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nb\xi} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{a}_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi},$$

其中$n\in\mathbb{Z}$, $c\in\mathcal{L}(a)$, $\widetilde{a}_j\in\mathcal{L}(a)\cap\mathcal{L}(b)^{\perp}$。那么定理结论可由引理3.5.2得到。

归纳假设, 结论对所有满足$R(a,b)\le N$和$\mathrm{gen}_b(a)\le R-1$的向量三角多项式$a(\xi)$和$b(\xi)$成立。现任取一对满足$\overline{a(\xi)}^T b(\xi) = 1$的向量值三角多项式$a(\xi)$和$b(\xi)$, 同时假设$R(a,b)=N\ge 2$和$\mathrm{gen}_b(a)=R\ge 1$。由归纳假设, 我们只要找到$U_i(\xi)\in\mathcal{N}(a,b)$, $1\le i\le l$, 使得

$$\begin{cases} a_1(\xi) = U_l(\xi)\cdots U_1(\xi)a(\xi)\,, \\ b_1(\xi) = \overline{U_l(\xi)}^T \cdots \overline{U_1(\xi)}^T b(\xi), \end{cases} \tag{3.5.25}$$

且

$$R(a_1,b_1)\le N \quad 和 \quad \mathrm{gen}_{b_1}(a_1)\le R-1$$

成立。由引理3.5.1, 存在$\alpha_i\in\mathcal{L}(a)$和$\beta_i\in\mathcal{L}(b)$以及三角多项式$H_i(\xi)$, $1\le i\le N$, 使得

$$a(\xi)=\sum_{i=1}^{N}H_i(\xi)\alpha_i+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widetilde{a}_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \tag{3.5.26}$$

并满足

$$\begin{cases} \alpha_i^T\beta_{i'}=\delta_{i,i'}, & 1\le i,i'\le N\,, \\ \widetilde{a}_j\in\mathcal{L}(a)\cap\mathcal{L}(b)^{\perp}, & j\in\mathbb{Z}\,。\end{cases} \tag{3.5.27}$$

把$H_1(\xi),\cdots,H_N(\xi)$所组成的向量$(H_1(\xi),\cdots,H_N(\xi))^T$写成为$\sum_{j\in\mathbb{Z}}h_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$。不妨假设, 对所有$j<0$成立$h_j=0$, 否则的话, 乘上某个$\mathrm{e}^{\mathrm{i}j_0\xi}$即可。同样, 不妨认为

$$\deg(H_1)<\deg(H_2)<\cdots<\deg(H_N), \tag{3.5.28}$$

而这里$\deg(P)$表示$P(\xi)=\sum_{j\ge 0}p_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$的使$p_j\ne 0$的极大指标$j$, 否则我们只要对$\alpha_i$和$\beta_j$ 进行一次线性变换。由(3.5.28)知$H_{N-1}(\xi)\ne 0$, 不然的话, 由(3.5.26)和引理3.5.1知$R(a,b)=1$, 这与假设$R(a,b)\ge 2$矛盾。由$R(a,b)=N, a(\xi)$的表示式(3.5.26)和H_i, $1\le i\le N$, 的条件(3.5.28), 我们得到$\deg(H_N)=R$。这蕴涵了$\deg(H_{N-1})\le R-1$。从而

$$H_N(\xi)=R_N(\xi)H_{N-1}(\xi)+\widetilde{H}_N(\xi),$$

其中 $R_N(\xi) = \sum_{j=1}^{l} r_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 和 $\deg(\widetilde{H}_N) \le \deg(\widetilde{H}_{N-1})$。现在定义一些属于 $\mathcal{N}(a,b)$ 的方阵

$$U_j(\xi) = I_M - r_j \alpha_N \beta_{N-1}^T (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} - 1), \qquad 1 \le j \le N\,。$$

此时,

$$\begin{aligned} U_l(\xi)\cdots U_1(\xi)a(\xi) \;&=\; a(\xi) - \sum_{j=1}^{l} r_j(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} - 1)H_{N-1}(\xi)\alpha_N \\ &=\; \Big(R_N(0)H_{N-1}(\xi) + \widetilde{H}_N(\xi)\Big)\,\alpha_N \\ &\quad\; + \sum_{i=1}^{N-1} H_i(\xi)\alpha_i + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\alpha}_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\,。 \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

那么

$$a_1(\xi) = U_l(\xi)\cdots U_1(\xi)a(\xi) \quad 和 \quad b_1(\xi) = \overline{U_l(\xi)}^T \cdots \overline{U_1(\xi)}^T b(\xi)$$

也满足 $a_1(\xi)^T\overline{b(\xi)} = 1$。另一方面, 由 $U_i(\xi)$ 的构造和 (3.5.29) 可知 $\mathcal{L}(b_1)\subset\mathcal{L}(b)$, $\mathcal{L}(a_1)\subset\mathcal{L}(a)$, $\mathrm{gen}_{b_1}(a_1) \le \mathrm{gen}_b(a_1) \le \deg(H_{N-1}) \le R-1$ 以及 $R(a_1,b_1) \le R(a,b) \le N$。由归纳法我们完成了定理3.5.2 证明。 $\square$

3.6 小波分解与合成

设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为一个多分辨分析, P_j, $j\in\mathbb{Z}$, 是 $L^2(\mathbb{R})$ 到 V_j 的有界算子, 且对任意的 $f\in L^2$

$$\lim_{j\to+\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0 \quad 和 \quad \lim_{j\to-\infty} \|P_j f\|_2 = 0\,。 \tag{3.6.1}$$

那么, 由 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的性质知, f 可分解为 V_j, $j\in\mathbb{Z}$, 中元素之和。

$$f=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(P_{j+1}-P_j)\,f\text{。} \tag{3.6.2}$$

满足 (3.6.1) 的算子族有很多, 如 P_j 为 $L^2(\mathbb{R})$ 到 V_j 的投影算子。对任一 $L^2(\mathbb{R})$ 函数 ϕ, 定义 $\phi_{j,k}=M^{j/2}\phi(M^j\cdot-k)$, $j,k\in\mathbb{Z}$。当 ϕ 是 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的尺度函数, 且具有正交的整平移性时, P_j 可写为

$$P_jf=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\phi_{j,k}\rangle\phi_{j,k}\text{。}$$

当 ϕ 是 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的尺度函数, 但只有稳定的整平移时, 我们可以定义 P_j 为

$$P_jf=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\widetilde{\phi}_{j,k}\rangle\phi_{j,k}\text{。}$$

这里 $\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi)=\widehat{\phi}(\xi)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2\right)^{-1}$。

当 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 为一个双正交的多分辨分析, 且 ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 为其双正交尺度函数时, 我们可以定义

$$P_jf=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\widetilde{\phi}_{j,k}\rangle\phi_{j,k}\text{。}$$

本节中, 我们只考虑具有下面形式的算子:

$$P_jf=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\widetilde{\phi}_{j,k}\rangle\phi_{j,k} \tag{3.6.3}$$

其中 $\widetilde{\phi}$ 是多分辨分析 $\{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的尺度函数, 且满足

$$\langle\widetilde{\phi}_{j,k},\phi_{j,k'}\rangle=\delta_{k,k'}\,,\qquad k,k'\in\mathbb{Z}\text{。} \tag{3.6.4}$$

设 ϕ 和 $\widetilde{\phi}$ 满足下面的细分方程

$$\begin{cases} \phi = \sum_{j\in\mathbb{Z}} h_0(j)\phi(M\cdot -j)\,, \\ \widetilde{\phi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_0(j)\widetilde{\phi}(M\cdot -j), \end{cases} \tag{3.6.5}$$

而 $\{h_0(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{h}_0(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |h_0(j)| < \infty$ 和 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widetilde{h}_0(j)| < \infty$。记

$$\begin{cases} H_0(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_0(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\,, \\ \widetilde{H}_0(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_0(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}, \end{cases} \tag{3.6.6}$$

那么在 (3.6.5) 两边取 Fourier 变换后有

$$\begin{cases} \widehat{\phi}(\xi) = H_0(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M)\,, \\ \widehat{\widetilde{\phi}}(\xi) = \widetilde{H}_0(\xi/M)\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi/M)\,。 \end{cases} \tag{3.6.7}$$

根据§3.4 节知, 存在序列 $\{h_s(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\widetilde{h}_s(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$,$1\le s\le M-1$, 使得

$$\sum_{t=0}^{M-1} H_s\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)\overline{\widetilde{H}_{s'}\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)} = \delta_{s,s'}, \qquad 0\le s,s'\le M-1, \tag{3.6.8}$$

其中

$$H_s(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} h_s(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi} \quad 和 \quad \widetilde{H}_s(\xi) = \frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_s(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\,。 \tag{3.6.9}$$

对满足 (3.6.7) 的 $H_s(\xi)$, 定义函数 $\psi_s\in V_1$ 和 $\widetilde{\psi}_s\in\widetilde{V}_1$, $1\le s\le M-1$ 为

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_s(\xi) = H_s(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M)\,, \\ \widehat{\widetilde{\psi}}_s(\xi) = \widetilde{H}_s(\xi/M)\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi/M)\,。 \end{cases} \tag{3.6.10}$$

则上述函数 ψ_s 和 $\widetilde{\psi}_s$ 就为双正交小波。当 ϕ 具有正交的整平移时取 $\widetilde{H}_s=H_s$, 那么 $\psi_s=\widetilde{\psi}_s$, $1\le s\le M-1$ 就为正交小波。当 ϕ 具有稳定的整平移时, 取 $\widetilde{\phi}$ 为 $\widehat{\widetilde{\phi}}=\widehat{\phi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2\right)^{-1}$ 以及 $\widetilde{H}_s(\xi)=H_s(\xi)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2\right)$, 那么 ψ_s, $1\le s\le M-1$ 就为半正交小波。

对任意的 $f\in V_1$, 存在 ℓ^2 序列 $\{c_1(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 使得

$$f=M^{1/2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_1(j)\phi(M\cdot-j) \tag{3.6.11}$$

对 (3.6.11) 取 Fourier 变换后, 并记 $C_1(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_1(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}$ 可知

$$\widehat{f}(\xi)=M^{-1/2}C_1(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M) \tag{3.6.12}$$

定义

$$\begin{cases}C_0(\xi)=M^{-1/2}\sum_{t=0}^{M-1}C_1\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)\widetilde{H}_0\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right),\\ D_{0,s}(\xi)=M^{-1/2}\sum_{t=0}^{M-1}C_1\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)\overline{\widetilde{H}_s\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)},\ 1\le s\le M-1,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}c_0(j)=M^{1/2}\sum_{j'\in\mathbb{Z}}c_1(j')\widetilde{h}_0(j'-Mj),\quad j\in\mathbb{Z},\\ d_{0,s}(j)=M^{1/2}\sum_{j'\in\mathbb{Z}}c_1(j')\widetilde{h}_s(-Mj+j'),\quad j\in\mathbb{Z}。\end{cases} \tag{3.6.13}$$

那么, 由 (3.6.7), (3.6.9) 和 (3.6.10) 得到

$$\begin{aligned}&C_0(\xi)\widehat{\phi}(\xi)+\sum_{s=1}^{M-1}D_{0,s}(\xi)\widehat{\phi}_s(\xi)\\ &=M^{-1/2}\sum_{s=0}^{M-1}\sum_{t=0}^{M-1}C_1\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)\overline{\widetilde{H}_s\left(\frac{\xi+2\pi t}{M}\right)}H_s\left(\frac{\xi}{M}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{M}\right)\end{aligned}$$

$$= \quad M^{-1/2}C_1(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M) = \widehat{f}(\xi)\text{。}$$

这表示 f 可以有下列的表示式

$$f = \sum_{s=1}^{M-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} d_{0,s}(j)\psi_s(\cdot - j) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_0(j)\phi(\cdot - j)\,, \qquad (3.6.14)$$

而序列 $\{c_0(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{d_{0,s}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $1 \le s \le M-1$, 可由 (3.6.13) 分解而得。这也就是说, (3.6.13) 把一个序列 $\{c_1(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 分解为了 M 个序列 $\{c_0(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{d_{0,s}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $1 \le s \le M-1$, 即

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\{c_1(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}} & \longrightarrow & \boxed{\{c_0(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}} \\
 & \searrow & \boxed{\{d_{0,1}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}} \\
 & \searrow & \vdots \\
 & \searrow & \boxed{\{d_{0,M-1}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}}
\end{array}
$$

当序列 $\{c_1(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 对应于 V_1 中的函数 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_1(j)M^{1/2}\phi(M\cdot -j)$, 序列 $\{c_0(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 对应于 V_0 中的函数 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_0(j)\phi(\cdot - j)$, 以及 $\{d_{0,s}(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 对应于 $\sum_{j\in\mathbb{Z}} d_{0,s}(j)\psi_s(\cdot - j)$ 时, 我们有 (3.6.14) 的分解形式。

记

$$W_{j,s} = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k)M^{j/2}\psi_s(M^j\cdot - k) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2 < \infty\right\}\text{。}$$

利用 (3.6.14),

$$V_1 = V_0 + W_{0,1} + \cdots + W_{0,M-1} 。 \tag{3.6.15}$$

多次利用 (3.6.15), 对 $N_2 \geq N_1 + 1$ 有

$$V_{N_2} = V_{N_1} + \sum_{j=N_1}^{N_2-1} \left(W_{j,1} + \cdots + W_{j,M-1}\right) ,$$

也就是说, 对任意的 $f_{N_2} \in V_{N_2}$, 我们有

$$f_{N_2} = f_{N_1} + \sum_{j=N_1}^{N_2-1} \sum_{s=1}^{M-1} g_{j,s} , \tag{3.6.16}$$

其中 $f_{N_1} \in V_{N_1}$ 和 $g_{j,s} \in W_{j,s}$。记

$$f_N = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n(k) M^{N/2} \phi(M^N \cdot - k)$$

和

$$g_{j,s} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,s}(k) M^{j/2} \psi_s(M^j \cdot - k) 。$$

对 f_N 和 $g_{j,s}$ 的系数 $\{c_N(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{d_{j,s}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, 我们有下面的 Mallat 分解算法关系

$$\begin{cases} c_{j-1}(k) = M^{1/2} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} c_j(k') \widetilde{h}_0(k' - Mk) , \\ d_{j-1,s}(k) = M^{1/2} \sum_{k'\in\mathbb{Z}} c_j(k') \widetilde{h}_s(k' - Mk), \quad 1 \leq s \leq M-1, \end{cases} \tag{3.6.17}$$

也就是下面的分解图式:

$$
\begin{tikzcd}
\{c_{N_2}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & \{c_{N_2-1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & \{c_{N_1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \\
 & \{d_{N_2-1,1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} & & \{d_{N_1,1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \{d_{N_2-1,M-1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} & & \{d_{N_1,M-1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}
$$

在记 $C_j(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_j(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}$ 和 $D_{j,s}(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,s}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}$ 后, 我们可以将 (3.6.17) 写为

$$
\begin{cases}
C_{j-1}(\xi)=M^{-1/2}\sum_{t=0}^{M-1}\overline{\widetilde{H}_0(\frac{\xi+2\pi t}{M})}C_j(\frac{\xi+2\pi t}{M}),\\
D_{j-1,s}(\xi)=M^{-1/2}\sum_{t=0}^{M-1}\overline{\widetilde{H}_s(\frac{\xi+2\pi t}{M})}C_j(\frac{\xi+2\pi t}{M}).
\end{cases}
$$

从上面的分解图式, 我们看到, 当一个序列 $\{c_{N_2}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 对应到 V_{N_2} 中的一个函数 f_{N_2} 后, 利用小波分解 (3.6.16), 用分解后的函数在小波基上的表示系数, 得到序列 $\{d_{j,s}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $1\le s\le M-1, N_1\le j\le N_2-1$ 和 $\{c_{N_1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$。

在信号分析中, 我们对得到的序列进行处理。所以自然的问题就是重构了。也就是说, 怎样从序列 $\{d_{j,s}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $1\le s\le M-1, N_1\le j\le N_2-1$ 和 $\{c_{N_1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 来重构 $\{c_{N_2}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$。容易看到, 我们只要给出用 $\{d_{0,s}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $1\le s\le M-1$ 和 $\{c_0(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 来重构 $\{c_1(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的公式即可。把 $\{d_{0,s}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 对应到函数 $g_s=\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{0,k}(k)\psi_s(\cdot-k)$, $\{c_1(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 对应到函数 $f_0=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_0(k)\phi(\cdot-k)$ 且 $\{c_1(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 对应到函数 $f_1=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_1(k)\phi(M\cdot-k)M^{1/2}$。

那么 $f_1, f_0, g_s, 1 \le s \le M-1$ 应该满足

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + g_1 + \cdots + g_{M-1} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_0(k)\phi(\cdot - k) + \sum_{s=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{0,s}(k)\psi_s(\cdot - k) \text{。} \end{aligned} \tag{3.6.18}$$

把 (3.6.10) 代入 (3.6.18) 知

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_0(k)h_0(l)\phi(M\cdot -Mk - l) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} d_{0,s}(k)h_s(l)\phi(M\cdot -Mk - l) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}} c_0(k')h_0(k - Mk')\right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{M-1}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} d_{0,s}(k')h_s(k - Mk')\right)\phi(M\cdot -k) \text{。} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} c_1(k) &= M^{-1/2}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} c_0(k')h(k - Mk') \\ &\quad + M^{-1/2}\sum_{s=1}^{M-1}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} d_{0,s}(k')h_s(k - Mk') \text{。} \end{aligned}$$

由此我们得到了下面的 Mallat 合成公式:

$$\begin{aligned} c_j(k) &= M^{-1/2}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} c_{j-1}(k')h(k - Mk') \\ &\quad + M^{-1/2}\sum_{s=1}^{M-1}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} d_{j-1,s}(k')h_s(k - Mk') \text{。} \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

当记 $C_j(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_j(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}$ 和 $D_{j,s}(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,s}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}$ 后, 我们可将 (3.6.19) 写为

$$C_j(\xi) = M^{1/2}H(\xi)C_{j-1}(M\xi) + M^{1/2}\sum_{s=0}^{M-1} H_s(\xi)D_{j-1,s}(M\xi)\text{。}$$

对任意的整数 $N_1 < N_2$, 由 (3.6.19), 我们得到下面的 Mallat 重构图:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\{c_{N_1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \arrow[r] & \boxed{\{c_{N_1+1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \boxed{\{c_{N_2}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \\
\boxed{\{d_{N_1,1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \arrow[ur] & \boxed{\{d_{N_1+1,1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \arrow[ur] & {} \arrow[ur] & \\
\vdots & \vdots & & \\
\boxed{\{d_{N_1,M-1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \arrow[uuur] & \boxed{\{d_{N_1+1,M-1}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}} \arrow[uuur] & {} \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}$$

第四章　多进小波的例子

在本章中我们将介绍一些多进小波的例子。如 Haar 小波、具有极小支撑的正交小波、对称或反对称的正交小波、具有插值性的正交小波、半正交小波等。

4.1　Haar小波

Haar 函数 ϕ 就是区间 $[0,1)$ 上的特征函数, 即

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1)\,, \\ 0, & x \notin [0,1)\,。\end{cases}$$

Haar 函数是一个很特别的函数。读者不难验证: $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\mathrm{d}x = 1$, ϕ 的整平移是正交的, $\widehat{\phi}(\xi) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}$ 且 ϕ 关于 $1/2$ 对称如图 4.1.1 所示。对任意的 $M \geq 2$, 它是一个细分函数。事实上,它满足下列的细分方程

$$\phi(x) = \phi(Mx) + \phi(Mx-1) + \cdots + \phi(Mx-M+1)\,。 \quad (4.1.1)$$

为表示与其伸缩因子有关, 记 Haar 函数的符号函数为$H_{0,M}(\xi)$,

$$H_{0,M}(\xi)=\frac{1}{M}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(M-1)\xi}\right)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\text{。}$$

注意到 $H_{0,M}(\xi)$ 在 $[-\pi/M,\pi/M]$ 上非零, 从而空间列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$V_j=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}M^{j/2}d(k)\phi(M^j\cdot-k):\sum_{k\in\mathbb{Z}}|d(k)|^2<\infty\right\},$$

是一个多分辨分析。现在我们来构造由上述多分辨分析所对应的正交对称或反对称小波。

为了表示与伸缩因子 M 有关, 我们将所构造的小波记为 $\psi_{s,M}$, $1\le s\le M-1$, 而不是通常的 ψ_s。事实上, 下面我们将要构造的 $\psi_{s,M}$ 支撑在 $[0,1]$ 之中。所以 $\psi_{s,M}$ 可写为

$$\psi_{s,M}(x)=\sum_{k=0}^{M-1}d_{s,M}(k)\phi(Mx-k),\qquad 1\le s\le M-1\text{。}$$

记

$$H_{s,M}(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}d_{s,M}(k)e^{-ik\xi}\text{。}\tag{4.1.2}$$

那么, 由定理2.10.1 和定理3.3.1, $\psi_{s,M}$, $1\le s\le M-1$是 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$所对应的对称或反对称正交小波的充分必要条件是

$$\sum_{t=0}^{M-1}H_{s,M}(\xi+2t\pi/M)\overline{H_{s',M}(\xi+2t\pi/M)}=\delta_{s,s'},\ 0\le s,s'\le M-1,\tag{4.1.3}$$

且对任何 $1\le s\le M-1$,

$$H_{s,M}(\xi)/H_{s,M}(-\xi)\text{ 是三角单项式。}\tag{4.1.4}$$

现在我们通过对伸缩因子 M 的归纳, 给出 $H_{s,M}$, $1 \le s \le M-1$, 的明确表示式。对 $M=2$, 定义

$$H_{1,2}(\xi)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{2}\text{。} \tag{4.1.5}$$

容易验证 $H_{0,2}$ 和 $H_{1,2}$ 满足 (4.1.2), (4.1.3) 和 (4.1.4)。

对 $M=3$, 定义

$$\begin{cases} H_{1,3}(\xi) &=& \frac{\sqrt{2}}{6}\left(1-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}\right), \\ H_{2,3}(\xi) &=& \frac{\sqrt{6}}{6}\left(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}\right)\text{。} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

同样不难验证, 由 (4.1.6) 所定义的 $H_{s,3}(\xi)$, $s=1,2$, 满足 (4.1.2), (4.1.3) 和 (4.1.4)。

现在我们归纳地来构造 $H_{s,M}$, $1\le s\le M-1$。为此, 我们把 M 分为二种情况: 奇数或偶数。

情形 I: $M\ge 4$为偶数。

记 $l=M/2$。设 $H_{s,l}$, $1\le s\le l-1$ 为归纳所得的滤波器。它们与$H_{0,l}$一起满足(4.1.2), (4.1.3) 和 (4.1.4)。现在定义

$$H_{s,M}(\xi)=\begin{cases} \frac{1}{2}H_{s,l}(\xi)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}), & 1\le s\le l-1, \\ \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi})\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}}{M^l(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}, & s=l, \\ \frac{1}{2}H_{s-l,l}(\xi)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}), & l+1\le s\le M-1\text{。} \end{cases} \tag{4.1.7}$$

不难验证由 (4.1.7) 得到的 $H_{s,M}(\xi)$, $1\le s\le M-1$, 满足 (4.1.2) 和 (4.1.4)。现在来验证 (4.1.3)。在定义 $d_{0,M}(t)=1, 0\le t\le M-1$, 并记 $D_M=(d_{s,M}(t))_{0\le s,t\le M-1}$ 后, 由 $H_{0,M}$ 和 $H_{s,M}$ 的表达式 (4.1.2) 知, 我们可以把 (4.1.3) 写成

$$D_M^TD_M=MI_M\text{。}$$

此时, 我们从 (4.1.7) 的构造看到

$$D_M = \begin{pmatrix} D_l & D_l \\ D_l & -D_l \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned} D_M^T D_M &= \begin{pmatrix} D_l^T & D_l^T \\ D_l^T & -D_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_l & D_l \\ D_l & -D_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2lI_l & 0 \\ 0 & 2lI_l \end{pmatrix} = MI_M\,。 \end{aligned}$$

也就说明了由 (4.1.7) 定义的 $H_{s,M}(\xi)$, $1 \le s \le M-1$, 满足(4.1.3)。

情形 II: $M \ge 5$ 为奇数。

记 $l = (M-1)/2$。设 $H_{s,l}$, $1 \le s \le l-1$, 为归纳所得的滤波器。它们与 $H_{0,l}$ 一起满足 (4.1.2), (4.1.3) 和 (4.1.4)。定义

$$H_{s,M}(\xi)=\begin{cases} \sqrt{\frac{l}{4l+2}}H_{s,l}(\xi)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l+1)\xi})\,, \quad 1 \le s \le l-1\,, \\ \frac{1}{2l+1}\sqrt{\frac{1}{2l}}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}}{l(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l+1)\xi})-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}\right)\,, \quad s=l\,, \\ \sqrt{\frac{l}{4l+2}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\xi}}{l(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l+1)\xi})\,, \quad s=l+1\,, \\ \sqrt{\frac{l}{4l+2}}H_{s-l-1,l}(\xi)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l+1)\xi})\,, \; l+2 \le s \le M-1\,。 \end{cases} \tag{4.1.8}$$

容易验证, 由 (4.1.8) 所定义的 $H_{s,M}(\xi)$, $1 \le s \le M-1$, 满足 (4.1.2) 和 (4.1.4)。记

$$D'_M = (d_{s,M}(t))_{1\le s\le M-1, 0\le t\le M-1}$$

和 $1_M = (1, \cdots, 1)^T$。那么 $D_M = (1_M, D'_M)$, 并且由 (4.1.8) 所定义的 D_M 与 D_l 有如下的关系

$$D_M = \begin{pmatrix} 1_l & \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} D'_l & \frac{1}{\sqrt{2l}} 1_l & \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} 1_l & \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} D'_l \\ 1 & 0 & -\sqrt{2l} & 0 & 0 \\ 1_l & \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} D'_l & \frac{1}{\sqrt{2l}} 1_l & -\sqrt{\frac{2l+1}{2l}} 1_l & -\sqrt{\frac{2l+1}{2l}} D'_l \end{pmatrix}$$

由上述表示式, 我们就不难验证(4.1.3)。

特别对 $M = 3$, 我们通过上述过程构造的正交小波 $\psi_{1,3}$ (图4.1.2), $\psi_{2,3}$ (图4.1.3) 为

$$\psi_{1,3}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3})\,, \\ -\sqrt{2}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \in [\frac{2}{3}, 1)\,, \\ 0, & \text{其它}\,; \end{cases}$$

和

$$\psi_{2,3}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{2}, & x \in [0, \frac{1}{3})\,, \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}, & x \in [\frac{2}{3}, 1)\,, \\ 0, & \text{其它}\,。 \end{cases}$$

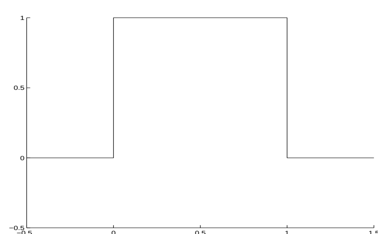


图4.1.1. Haar函数ϕ

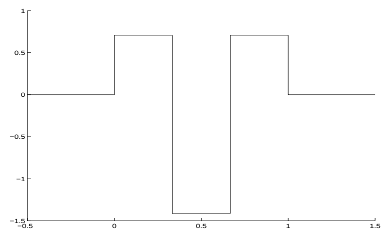


图4.1.2. 对称小波$\psi_{1,3}$

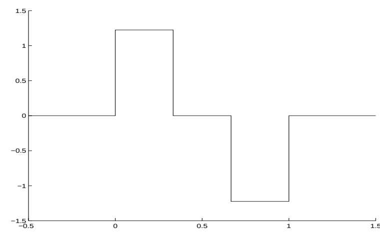


图4.1.3. 反对称小波$\psi_{2,3}$

对 $M=4$, 通过上述过程得到的 Haar 函数 ϕ 如图 4.1.4, 构造的正交小波 $\psi_{1,4}$ (图4.1.5), $\psi_{2,4}$ (图4.1.6), $\psi_{3,4}$ (图4.1.7) 为

$$\psi_{1,4}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x \in [0,1/4) \cup [1/2,3/4)\,, \\ -1, & x \in [1/4,1/2) \cup [3/4,1)\,, \\ 0, & \text{其它}\,; \end{cases}$$

$$\psi_{2,4}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x \in [0,1/2)\,, \\ -1, & x \in [1/2,1)\,, \\ 0, & \text{其它}\,; \end{cases}$$

$$\psi_{3,4}(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x \in [0,1/4) \cup [3/4,1)\,, \\ -1, & x \in [1/4,3/4)\,, \\ 0, & \text{其它}\,。 \end{cases}$$

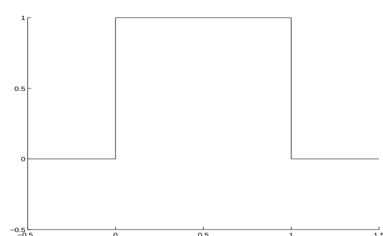


图4.1.4. Haar函数ϕ

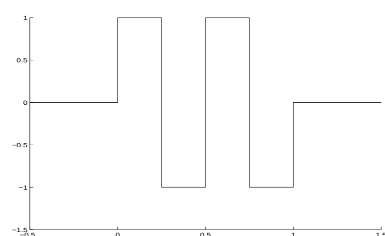


图4.1.5. 反对称小波$\psi_{1,4}$

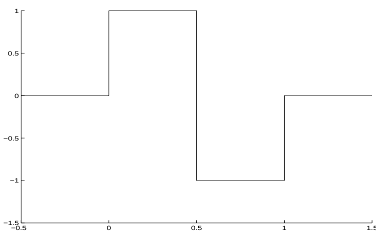


图4.1.6. 反对称小波$\psi_{2,4}$

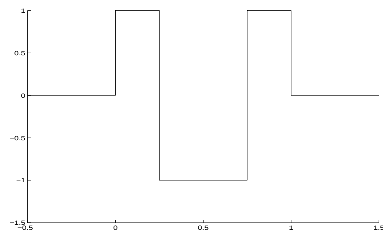


图4.1.7. 对称小波$\psi_{3,4}$

4.2 正交小波

紧支撑正交小波一直是人们所关注的课题。在§4.1中, 我们已经构造了正交的Haar小波。Haar小波并不连续, 这迫使我们考虑构造具有一定光滑性的尺度函数, 从而根据§3.3节提供的算法来构造具有一定光滑性的正交小波。设$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$是一个多分辨分析, ϕ是它的一个紧支撑的具有正交整平移的尺度函数。那么, ϕ满足细分方程

$$\phi=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)\phi(M\cdot-j)\text{。} \tag{4.2.1}$$

由ϕ的紧支撑性和正交整平移性, 我们从$c(j)=M\langle\phi,\phi(M\cdot-j)\rangle$, $j\in\mathbb{Z}$, 知$\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$是有限长的序列。记

$$H(\xi)=\frac{1}{M}\sum_{j\in\mathbb{Z}}c(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\xi}\text{。} \tag{4.2.2}$$

那么由定理2.5.1,

$$\begin{cases}\sum_{s=0}^{M-1}|H(\xi+\frac{2\pi s}{M})|^2=1\,,\\ H(0)=1\text{。}\end{cases} \tag{4.2.3}$$

由定理2.8.1 和定理2.8.2 知, $H(\xi)$ 又可以表示为

$$H(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^{N}Q(\xi), \tag{4.2.4}$$

其中 $N\geq 1$ 和 Q 为三角多项式。由此

$$|H(\xi)|^2=\left(\frac{\sin^2\frac{M\xi}{2}}{M^2\sin^2\frac{\xi}{2}}\right)^{N}|Q(\xi)|^2\text{。}$$

把上式代入 (4.2.3) 并记 $R(\xi)=|Q(\xi)|^2$, 我们得到

$$\left(\frac{\sin^2\frac{M\xi}{2}}{M^2\sin^2\frac{\xi}{2}}\right)^{N}R(\xi)+\sum_{t=1}^{M-1}\left(\frac{\sin^2\frac{M\xi}{2}}{M^2\sin^2(\frac{\xi}{2}+\frac{t\pi}{M})}\right)^{N}R\left(\xi+\frac{2\pi t}{M}\right)=1\text{。} \tag{4.2.5}$$

从 (4.2.5), 我们看到

$$\left(\frac{\sin^2\frac{M\xi}{2}}{M^2\sin^2\frac{\xi}{2}}\right)^{N}R(\xi)=1+O\left(\xi^{2N}\right),\qquad \xi\to 0\text{。} \tag{4.2.6}$$

另一方面,

$$\frac{\sin^2\frac{M\xi}{2}}{M^2\sin^2\frac{\xi}{2}}=\prod_{s=1}^{M-1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{\sin^2\frac{s\pi}{M}}\right)\text{。} \tag{4.2.7}$$

应用 Taylar 展开, 我们得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin^2\frac{M\xi}{2}}{M^2\sin^2\frac{\xi}{2}}\right)^{-N}&=\left(\prod_{s=1}^{M-1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{\sin^2\frac{s\pi}{M}}\right)^{-1}\right)^{N}\\ =\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{s_1+\cdots+s_M=s}\prod_{j=1}^{M-1}&\left(\begin{array}{c}N-1+s_j\\ s_j\end{array}\right)\left(\sin\frac{j\pi}{M}\right)^{-2s_j}\sin^{2s}\frac{\xi}{2}\\ &+O\left(\xi^{2N}\right)\text{。}\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

记

$$
{}_N^M P(\xi)=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{s_1+\cdots+s_M=s}\prod_{j=1}^{M-1}\begin{pmatrix} N-1+s_j \\ s_j \end{pmatrix}\left(\sin\frac{j\pi}{M}\right)^{-2s_j}\sin^{2s}\frac{\xi}{2},
$$

那么, 满足 (4.2.6) 的三角多项式 $R(\xi)$ 可写为

$$
R(\xi) = {}_N^M P(\xi) + R_N(\xi),
$$

其中 $R_N(\xi)$ 是一个三角多项式并满足 $|R_N(\xi)| = O\left(\xi^{2N}\right), \xi \to 0$。事实上, 当取 $R_N(\xi) = 0$ 时, R 就满足 (4.2.5)。进一步, 我们有下面的结论。

定理 4.2.1 **设** $H(\xi)$ **是一个三角多项式且有** (4.2.4) **的形式。那么,** $H(\xi)$ **满足** (4.2.3) **的充分必要条件是:**

$$
|Q(\xi)|^2 = {}_N^M P(\xi) + \sin^{2N}\frac{\xi}{2}\sum_{s=1}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}R_s(M\xi), \tag{4.2.9}
$$

$R_s(-\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}R_{M-s}(\xi)$ **, 以及**

$$
{}_N^M P(\xi) + \sin^{2N}\frac{\xi}{2}\sum_{s=1}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\xi}R_s(M\xi) \geq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}\ 。
$$

在此, 我们必须提到 Riesz 引理 (参见 [22]), 它阐明了当 (4.2.9) 的右边是非负的 $\cos\xi$ 多项式时, 存在一个实系数的三角多项式 $Q(\xi)$, 使得 (4.2.9) 成立。

引理 4.2.1 **设** $A(\xi)$ **是一个三角多项式,**

$$
A(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\xi}\right), \qquad a_m \in \mathbb{R}.
$$

又设$A(\xi) \geq 0$, 对所有$\xi \in \mathbb{R}$成立。那么, 存在三角多项式

$$B(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1} b_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}, \qquad b_m \in \mathbb{R},$$

使得$|B(\xi)|^2 = A(\xi)$。

显然, 对一切$\xi \in [-\pi, \pi]$成立${}_N^M P(\xi) > 0$。由引理4.2.1知, 存在三角多项式$\sum_{m=0}^{N-1} b_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}$使得它的模的平方为${}_N^M P(\xi)$。我们记此三角多项式为${}_N^M Q(\xi)$, 即

$${}_N^M Q(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1} {}_N^M b(m) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\xi}, \qquad |{}_N^M Q(\xi)|^2 = {}_N^M P(\xi)\text{。} \tag{4.2.10}$$

当$N = 2$时,

$${}_N^M Q(\xi) = \frac{1+\theta_M}{2} + \frac{1-\theta_M}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} \quad \text{或} \quad \frac{1-\theta_M}{2} + \frac{1+\theta_M}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\text{。}$$

其中$\theta_M = \sqrt{\frac{2M^2+1}{3}}$。记

$${}_N^M H(\xi) = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M - M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^N {}_N^M Q(\xi),$$

那么, ${}_N^M H(\xi)$有(4.2.4)的表达式且满足(4.2.3)。根据上面的陈述, 我们看到${}_N^M H(\xi)$是满足(4.2.3)和(4.2.4)的具有最小次数的三角多项式。对上述定义的三角多项式${}_N^M H(\xi)$, 由细分方程(4.2.1), 我们得到相应的一个细分函数, 记为${}_N^M \phi$。由于对一切$|\xi| \leq \pi/M$都有$|{}_N^M H(\xi)| \neq 0$。因此, ${}_N^M \phi$就有正交的整平移。对$M = 2$, ${}_N^M \phi$早在1988年就由I.Daubechies引入, 对$M \geq 3$, ${}_N^M \phi$的上述生成方法由Heller得到([32]), 作者在1995年也曾独

立地得到过。对极小支撑的正交尺度函数, 我们有下面的性质:

(i) ${}^M_N\phi$ 支撑于 $[0, N+\frac{N-1}{M-1}]$;

(ii) ${}^M_N\phi$ 的整平移是正交的;

(iii) ${}^M_N\phi$ 除 $N=1$ 之外不是对称的;

(iv) ${}^M_N\phi$ 在 $N \leq M-1$ 时为局部多项式;

(v) ${}^M_N\phi$ 在 $N \leq M-1$ 时是局部线性相关的;

(vi) 当 $0<p<\infty$ 时, 对 ${}^M_N\phi$ 的 Fourier 指数 $s_p({}^M_N\phi)$ 有下面的估计: 存在常数 C 使得, 当 M 为偶数时

$$\left| s_p({}^M_N\phi) - \frac{4N\ln(\sin\frac{M\pi}{2m+2})^{-1}+\ln N}{4\ln M} \right| \leq C;$$

以及当 M 为奇数时

$$\left| s_p({}^M_N\phi) - \frac{\ln N}{4\ln M} \right| \leq C;$$

(vii) 当 $N=2$ 时, ${}^M_N\phi$ 的 Hölder 指数为

$$\ln\left(1+\sqrt{(2M^2+1)/3}\right)/\ln M \text{ 。}$$

利用 § 3.3 的矩阵扩张, 对尺度函数 ${}^M_N\phi$ 生成的多分辨分析, 我们就能得到一组正交小波 ${}^M_N\psi_1, \cdots, {}^M_N\psi_{M-1}$。下面, 我们对 $M=3,4$ 和 $N=2,3$ 时, 给出 ${}^M_N\phi, {}^M_N\psi_1, \cdots, {}^M_N\psi_{M-1}$ 的表达式和图形。

情形 1: $M=3$ 和 $N=2$。

此时 ${}^3_2H(\xi)=\sum_{n=0}^5 {}^3_2h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。由 § 3.3 节的酉矩阵扩张我们得到

$$\begin{cases} {}^3_2H_1(\xi)=\sum_{n=0}^5 {}^3_2h_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,, \\ {}^3_2H_2(\xi)=\sum_{n=0}^5 {}^3_2h_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,, \end{cases}$$

所对应的系数 $\{{}^3_2h(n)\}_{n=0}^5$, $\{{}^3_2h_1(n)\}_{n=0}^5$ 和 $\{{}^3_2h_2(n)\}_{n=0}^5$, 参见下面的表1。由此尺度函数 ${}^3_2\phi$ 如图4.2.1, 它满足

$$\widehat{{}^3_2\phi}(\xi) = {}^3_2H(\xi/3)\widehat{{}^3_2\phi}(\xi/3),$$

而正交小波 ${}^3_2\psi_1$ (图4.2.2), ${}^3_2\psi_2$ (图4.2.3) 分别是

$$\begin{cases} \widehat{{}^3_2\psi_1}(\xi) = {}^3_2H_1(\xi/3)\widehat{{}^3_2\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{{}^3_2\psi_2}(\xi) = {}^3_2H_2(\xi/3)\widehat{{}^3_2\phi}(\xi/3)\,\text{。} \end{cases}$$

表1: ${}^3_2H(\xi)$, ${}^3_2H_1(\xi)$ 和${}^3_2H_2(\xi)$ 的系数

n	$\{{}^3_2h(n)\}_{n=0}^5$	$\{{}^3_2h_1(n)\}_{n=0}^5$	$\{{}^3_2h_2(n)\}_{n=0}^5$
0	0.195367304356866	-0.06776765186212	0.23303985493097
1	0.306478415467977	0.31426968052735	-0.36288736930121
2	0.417589526579088	-0.01079976826972	0.26593027785820
3	0.137966028976468	-0.40363686892891	-0.23303985493097
4	0.026854917865357	-0.07856742013184	-0.04536092116266
5	-0.084256193245755	0.24650202866523	0.14231801260566

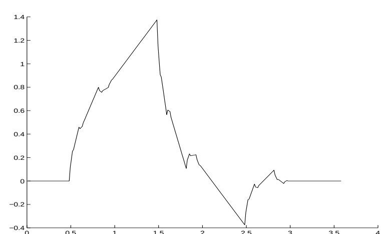


图4.2.1.尺度函数${}^3_2\phi$

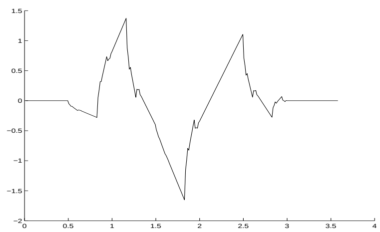


图4.2.2.小波$_2^3\psi_1$

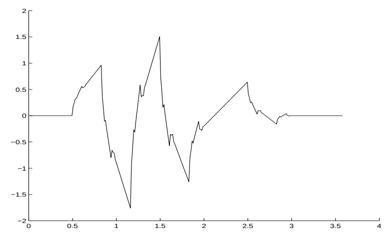


图4.2.3.小波$_2^3\psi_2$

情形 2: $M=3$ 和 $N=3$。

此时 $_3^3H(\xi)=\sum_{n=0}^{8}{}_3^3h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。由 § 3.3 节的酉矩阵扩张我们得到

$$\begin{cases} {}_3^3H_1(\xi)=\sum_{n=0}^{8}{}_3^3h_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}, \\ {}_3^3H_2(\xi)=\sum_{n=0}^{8}{}_3^3h_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}, \end{cases}$$

所对应的系数 $\{{}_3^3h(n)\}_{n=0}^{8}$ ，$\{{}_3^3h_1(n)\}_{n=0}^{8}$ 和 $\{{}_3^3h_2(n)\}_{n=0}^{8}$ 参见图后的表2。由此尺度函数 $_3^3\phi$ 如图4.2.4, 它满足

$$\widehat{{}_3^3\phi}(\xi)={}_3^3H(\xi/3)\widehat{{}_3^3\phi}(\xi/3),$$

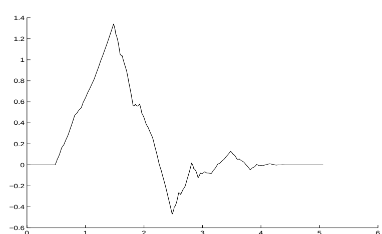


图4.2.4 尺度函数$_3^3\phi$

而正交小波 ${}_3^3\psi_1$ (图4.2.5), ${}_3^3\psi_2$ (图4.2.6) 分别为

$$\begin{cases} \widehat{{}_3^3\psi_1}(\xi) = {}_3^3H_1(\xi/3)\widehat{{}_3^3\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{{}_3^3\psi_2}(\xi) = {}_3^3H_2(\xi/3)\widehat{{}_3^3\phi}(\xi/3)\,。 \end{cases}$$

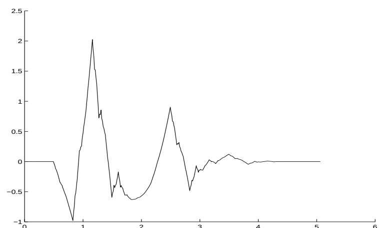


图4.2.5 小波${}_3^3\psi_1$

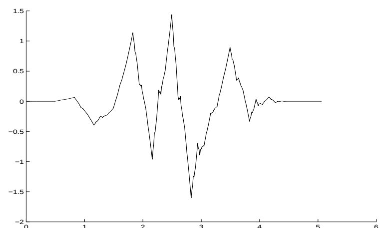


图4.2.6 小波${}_3^3\psi_2$

表2: ${}_3^3H(\xi)$, ${}_3^3H_1(\xi)$ 和${}_3^3H_2(\xi)$的系数

n	$\{{}_3^3h(n)\}_{n=0}^8$	$\{{}_3^3h_1(n)\}_{n=0}^8$	$\{{}_3^3h_2(n)\}_{n=0}^8$
0	0.117280131135231	-0.24327837827304	0.01637273082703
1	0.244305962191728	0.41841099443148	-0.09292725304121
2	0.408368830285262	0.02280097898275	-0.06243203656990
3	0.257628342010142	-0.18881538772763	0.26992763497551
4	0.114687791008258	-0.15844590587096	-0.13861477431246
5	-0.102326834067699	0.18709636371172	0.28274302039306
6	-0.041575139812039	-0.03931075479036	-0.28630036580254
7	-0.025660419866653	-0.02426282816501	-0.17670626311019
8	0.027291337115770	0.02580491770105	0.18793730664070

情形 3: $M=4$ 和 $N=2$。

此时 ${}^4_2H(\xi)=\sum_{n=0}^{7}{}^4_2h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。由 § 3.3 节的酉矩阵扩张我们得到

$$\begin{cases} {}^4_2H_1(\xi)=\sum_{n=0}^{7}{}^4_2h_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,, \\ {}^4_2H_2(\xi)=\sum_{n=0}^{7}{}^4_2h_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,, \\ {}^4_2H_3(\xi)=\sum_{n=0}^{7}{}^4_2h_3(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,。\end{cases}$$

所对应的系数 $\{{}^4_2h(n)\}_{n=0}^{7}$ ，$\{{}^4_2h_1(n)\}_{n=0}^{7}$ ，$\{{}^4_2h_2(n)\}_{n=0}^{7}$ 和 $\{{}^4_2h_3(n)\}_{n=0}^{7}$ 分别参见下面的表3和表4。由此尺度函数 ${}^4_2\phi$ (图4.2.7) 满足

$$\widehat{{}^4_2\phi}(\xi)={}^4_2H(\xi/3)\widehat{{}^4_2\phi}(\xi/3),$$

而正交小波 ${}^4_2\psi_1$ (图4.2.8), ${}^4_2\psi_2$ (图4.2.9) 和 ${}^4_2\psi_3$ (图4.2.10) 分别为

$$\begin{cases} \widehat{{}^4_2\psi_1}(\xi)={}^4_2H_1(\xi/3)\widehat{{}^4_2\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{{}^4_2\psi_2}(\xi)={}^4_2H_2(\xi/3)\widehat{{}^4_2\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{{}^4_2\psi_3}(\xi)={}^4_2H_3(\xi/3)\widehat{{}^4_2\phi}(\xi/3)\,。\end{cases}$$

表3: ${}^4_2H(\xi)$ 和${}^4_2H_1(\xi)$ 的系数

n	$\{{}^4_2h(n)\}_{n=0}^{7}$	$\{{}^4_2h_1(n)\}_{n=0}^{7}$
0	0.134894524698606	-0.141271753965439
1	0.197394524698606	0.277668941764017
2	0.259894524698606	0.119259368303852
3	0.322394524698606	-0.039150205156319
4	0.115105475301394	-0.291740947926782
5	0.052605475301394	-0.133331374466610
6	-0.009894524698606	0.025078198993555
7	-0.072394524698606	0.183487772453726

表4: ${}^4_2H_2(\xi)$ 和${}^4_2H_3(\xi)$ 的系数

n	$\{{}^4_2h_2(n)\}_{n=0}^7$	$\{{}^4_2h_3(n)\}_{n=0}^7$
0	0.206292002628820	0.119102743249413
1	-0.313968771433598	0.054432305691191
2	0.186391180663641	-0.363791522460306
3	0.074378697065083	0.278644821168021
4	-0.206292002628820	-0.119102743249413
5	-0.094279519030262	-0.054432305691191
6	0.017732964568288	0.010238131867031
7	0.129745448166847	0.074908569425254

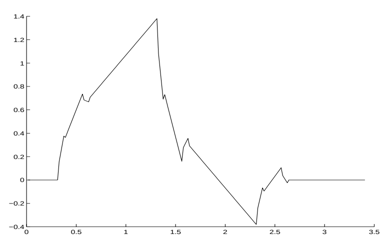


图4.2.7 尺度函数${}^4_2\phi$

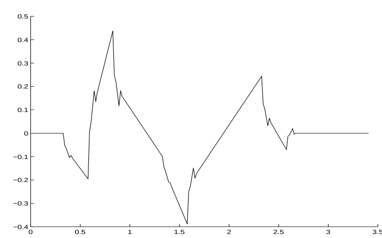


图4.2.8 小波${}^4_2\psi_1$

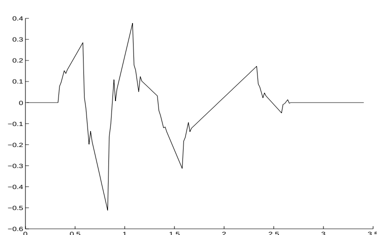


图4.2.9 小波${}^4_2\psi_2$

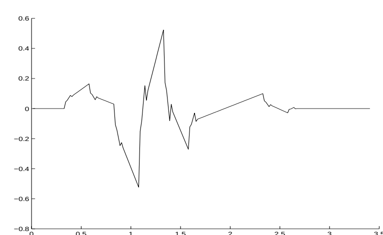


图4.2.10 小波${}^4_2\psi_3$

情形 4: $M=4$ 和 $N=3$ 。

此时 ${}^4_3H(\xi)=\sum_{n=0}^{11}{}^4_3h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$。由 § 3.3 节的酉矩阵扩张我们得到

$$\begin{cases} {}^4_3H_1(\xi)=\sum_{n=0}^{11}{}^4_3h_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,, \\ {}^4_3H_2(\xi)=\sum_{n=0}^{11}{}^4_3h_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\,, \\ {}^4_3H_3(\xi)=\sum_{n=0}^{11}{}^4_3h_3(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}\text{。} \end{cases}$$

所对应的系数 $\{{}^4_3h(n)\}_{n=0}^{11}$, $\{{}^4_3h_1(n)\}_{n=0}^{11}$, $\{{}^4_3h_2(n)\}_{n=0}^{11}$ 和 $\{{}^4_3h_3(n)\}_{n=0}^{11}$ 分别参见下面的表5和表6。

表5: ${}^4_3H(\xi)=\sum_{n=0}^{11}{}^4_3h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}$ 的系数

${}^4_3h(0)$	0.0254934546181825	${}^4_3h(6)$	0.1365130907636350
${}^4_3h(1)$	-0.0088038180814914	${}^4_3h(7)$	0.2051076361629828
${}^4_3h(2)$	-0.0274760907811654	${}^4_3h(8)$	0.3189325454168782
${}^4_3h(3)$	-0.0305233634808393	${}^4_3h(9)$	0.2221352727172043
${}^4_3h(4)$	-0.0944260000350607	${}^4_3h(10)$	0.1409630000175303
${}^4_3h(5)$	0.0366685453642871	${}^4_3h(11)$	0.0754157273178564

由此尺度函数 ${}^4_3\phi$ (图4.2.11) 满足

$$\widehat{{}^4_3\phi}(\xi)={}^4_3H(\xi/3)\widehat{{}^4_3\phi}(\xi/3)\,,$$

而正交小波 ${}^4_3\psi_1$ (图4.2.12), ${}^4_3\psi_2$ (图4.2.13) 和 ${}^4_3\psi_3$ (图4.2.14) 分别为

$$\begin{cases} \widehat{{}^4_3\psi_1}(\xi)={}^4_3H_1(\xi/3)\widehat{{}^4_3\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{{}^4_3\psi_2}(\xi)={}^4_3H_2(\xi/3)\widehat{{}^4_3\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{{}^4_3\psi_3}(\xi)={}^4_3H_3(\xi/3)\widehat{{}^4_3\phi}(\xi/3)\text{。} \end{cases}$$

表6: ${}^4_3H_1(\xi)$, ${}^4_3H_2(\xi)$ 和${}^4_3H_3(\xi)$ 的系数

n	$\{{}^4_3h_1(n)\}_{n=0}^{11}$	$\{{}^4_3h_2(n)\}_{n=0}^{11}$	$\{{}^4_3h_3(n)\}_{n=0}^{11}$
0	-0.28551296008145	0.08952341819026	0.04315622174374
1	0.23624092315126	-0.35071316399551	0.02891645359350
2	0.19068548982346	0.23530900072436	-0.33646568130470
3	0.15517100912478	0.21459675049441	0.36122337942223
4	-0.18121765358831	-0.10452289388989	-0.04671084456832
5	-0.11538774976658	-0.06798220273270	-0.03139223451299
6	-0.06125069136163	-0.03781437989718	-0.01865879478763
7	-0.01880647837346	-0.01401942538331	-0.00851052539228
8	0.03371791177754	0.01499947569963	0.00355462282458
9	0.02348439391273	0.01044707626435	0.00247578091949
10	0.01490276883558	0.00662952440475	0.00157108549906
11	0.00797303654608	0.00354682012083	0.00084053656332

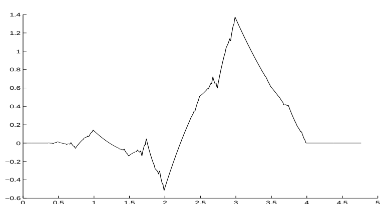


图4.2.11 尺度函数${}^4_3\phi$

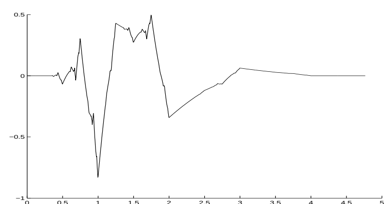


图4.2.12 小波${}^4_3\psi_1$

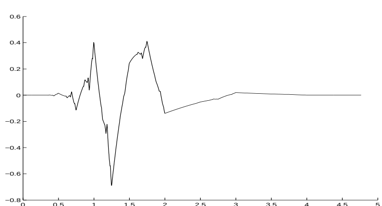


图4.2.13 小波${}^4_3\psi_2$

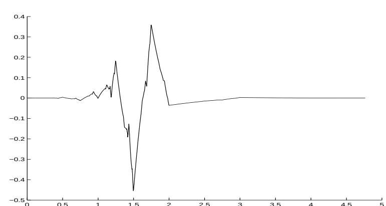


图4.2.14 小波${}^4_3\psi_3$

4.3 对称和反对称正交小波

在伸缩因子为 2 时, 我们知道除 Haar 小波之外, 不存在对称或反对称的紧支撑小波 (定理2.10.3)。在伸缩因子 $M \geq 3$ 时, 情况就不一样了。我们能够找到这样的小波。本节将介绍由崔锦泰和连建傲([8])在伸缩因子为 3 和韩斌([30])在伸缩因子为 4 时的对称和反对称正交小波的例子。我们仍然从多分辨分析来构造这类小波。在 § 3.3 节中用矩阵扩张的方法来得到的小波未必是对称或反对称的, 因此,我们同时给出它们的尺度函数和小波的表达式。

4.3.1. 伸缩因子 $M = 3$ 的例子

取

$$
\begin{aligned}
H_0(\xi) = & -\frac{1}{81}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}\right)^2 \\
& \times\left(1+2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-15\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}+2\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\xi}\right) \\
= & -\frac{1}{81}\left(1+4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-8\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}-20\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi}-35\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\xi}-20\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\xi}\right. \\
& \left.-8\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\xi}+4\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\xi}\right) 。
\end{aligned}
$$

容易验证,

$$H_0(-\xi) = e^{-8i\xi} H_0(\xi), \tag{4.3.1}$$

和

$$|H_0(\xi)|^2 + \left|H_0\left(\xi+\frac{2\pi}{3}\right)\right|^2 + \left|H_0\left(\xi+\frac{4\pi}{3}\right)\right|^2 = 1, \tag{4.3.2}$$

以及

$$|H_0(\xi)| \neq 0, \qquad \xi \in [-\pi/3, \pi/3] 。$$

因此下列细分方程

$$\widehat{\phi}(\xi) = H_0(\xi/3)\widehat{\phi}(\xi/3), \quad \widehat{\phi}(0) = 1, \tag{4.3.3}$$

的紧支撑 $L^2(\mathbb{R})$ 解 ϕ 所生成的空间族

$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} d(k) 3^{j/2}\phi(3^j \cdot - k) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |d(k)|^2 < \infty \right\}, \, j \in \mathbb{Z}$$

是一个多分辨分析。由 (4.3.1)～(4.3.3) 知, ϕ 支撑于 $[0,4]$ 并有正交的整平移和关于 $x=2$ 对称。定义

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \frac{1}{81\sqrt{2}}\big(-5 - 20\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} + 40\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi} - 8\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi} - 14\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\xi} \\ &\quad -8\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\xi} + 40\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\xi} - 20\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\xi} - 5\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\xi}\big)\,, \end{aligned}$$

$$H_2(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{54}\big(-1 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} + 8\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi} - 8\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\xi} + 4\mathrm{e}^{-7\mathrm{i}\xi} + \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\xi}\big)\ 。$$

那么 $H_1(-\xi) = \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\xi}H_1(\xi)$, $H_2(-\xi) = -\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\xi}H_2(\xi)$, 且

$$\begin{pmatrix} H_0(\xi) & H_0(\xi+\frac{2\pi}{3}) & H_0(\xi+\frac{4\pi}{3}) \\ H_1(\xi) & H_1(\xi+\frac{2\pi}{3}) & H_1(\xi+\frac{4\pi}{3}) \\ H_2(\xi) & H_2(\xi+\frac{2\pi}{3}) & H_2(\xi+\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

是一个酉矩阵。从而下面所定义的函数 ψ_1 和 ψ_2 ,

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_1(\xi) &= H_1(\xi/3)\widehat{\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{\psi}_2(\xi) &= H_2(\xi/3)\widehat{\phi}(\xi/3) \end{cases}$$

是对称和反对称的正交小波。下面分别为ϕ (图4.3.1),
ψ_1 (图4.3.2) 和 ψ_2 (图4.3.3)的图。

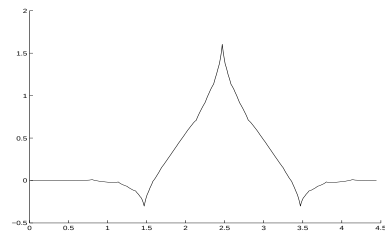


图4.3.1 尺度函数ϕ

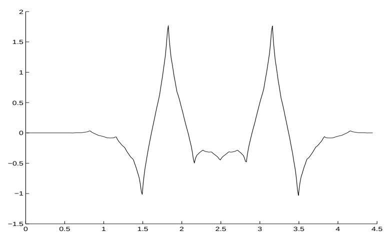


图4.3.2 对称小波ψ_1

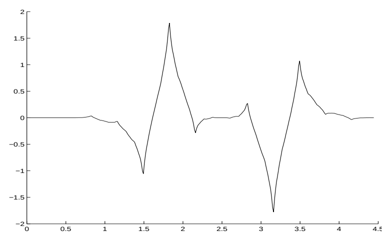


图4.3.3 反对称小波ψ_2

4.3.2. **伸缩因子为 $M=4$ 的例子**

取

$$H_0(\xi)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\xi}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi}\right)^4\widetilde{H}_0(\xi),$$

其中 $\widetilde{H}_0(\xi)=\sum_{n=0}^{7}\widetilde{h}_0(n)\left(\mathrm{e}^{(7-n)\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-(8-n)\mathrm{i}\xi}\right)$，其相应的系数 $\{\widetilde{h}_0(n)\}_{n=0}^{7}$ 参见下面的表7。

表7：$\widetilde{H}_0(\xi)=\sum_{n=0}^{7}\widetilde{h}_0(n)\left(\mathrm{e}^{(7-n)\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-(8-n)\mathrm{i}\xi}\right)$ 的系数

$\widetilde{h}_0(0)$	-0.0029325485229492	$\widetilde{h}_0(4)$	-0.01236123175047547
$\widetilde{h}_0(1)$	0.0154267771808598	$\widetilde{h}_0(5)$	-0.01668829920195452
$\widetilde{h}_0(2)$	-0.0363648587206678	$\widetilde{h}_0(6)$	-0.04086982565532505
$\widetilde{h}_0(3)$	0.0448216219918581	$\widetilde{h}_0(7)$	0.05678086467865418

通过计算, 我们得到$H_0(-\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}H_0(\xi)$,

$$|H_0(\xi)|^2+\left|H_0\left(\xi+\frac{\pi}{2}\right)\right|^2+|H_0(\xi+\pi)|^2+\left|H_0\left(\xi+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2=1,$$

并且 $H_0(\xi)\neq 0$ 对所有的 $\xi\in[-\pi/4,\pi/4]$ 成立。因此, 细分方程

$$\widehat{\phi}(\xi)=H_0(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4)\,,\quad \widehat{\phi}(0)=1\,,$$

的紧支撑 $L^2(\mathbb{R})$ 解 ϕ 有正交的整平移和关于 $x=1/6$ 对称。定义

$$\begin{cases} H_1(\xi)=\sum_{n=0}^{13}h_1(n)\left(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-(n+1)\mathrm{i}\xi}\right)\,, \\ H_2(\xi)=\sum_{n=0}^{13}h_2(n)\left(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\xi}-\mathrm{e}^{-(n+1)\mathrm{i}\xi}\right)\,, \\ H_3(\xi)=\sum_{n=0}^{13}h_3(n)\left(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\xi}-\mathrm{e}^{-(n+1)\mathrm{i}\xi}\right)\,。\end{cases}$$

其相应的系数 $\{h_1(n)\}_{n=0}^{13}$ ，$\{h_2(n)\}_{n=0}^{13}$ 和 $\{h_3(n)\}_{n=0}^{13}$ 参见下面的表8。

不难验证 $H_1(-\xi)=H_1(\xi)$, $H_2(-\xi)=-H_2(\xi)$ 和 $H_3(-\xi)=\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\xi}H_3(\xi)$, 并且

$$\begin{pmatrix} H_0(\xi) & H_0(\xi+\frac{\pi}{2}) & H_0(\xi+\pi) & H_0(\xi+\frac{3\pi}{2}) \\ H_1(\xi) & H_1(\xi+\frac{\pi}{2}) & H_1(\xi+\pi) & H_1(\xi+\frac{3\pi}{2}) \\ H_2(\xi) & H_2(\xi+\frac{\pi}{2}) & H_2(\xi+\pi) & H_2(\xi+\frac{3\pi}{2}) \\ H_3(\xi) & H_3(\xi+\frac{\pi}{2}) & H_3(\xi+\pi) & H_3(\xi+\frac{3\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

是一个酉矩阵。定义函数 ψ_1, ψ_2, ψ_3 分别为

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_1(\xi)=H_1(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4)\,, \\ \widehat{\psi}_2(\xi)=H_2(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4)\,, \\ \widehat{\psi}_3(\xi)=H_3(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4)\,。\end{cases}$$

那么ψ_1, ψ_2, ψ_3是对称和反对称的正交小波。此小波的一个重要数值性质是ϕ (图4.3.4)，ψ_1 (图4.3.5)，ψ_2 (图4.3.6)，ψ_3 (图4.3.7) 是连续可微函数。

表8：$H_1(\xi), H_2(\xi)$ 和$H_3(\xi)$ 的系数

n	$\{h_1(n)\}_{n=0}^{13}$	$\{h_2(n)\}_{n=0}^{13}$	$\{h_3(n)\}_{n=0}^{13}$
0	0.19627362842553	0.27674999778212	0.19627362842553
1	-0.27674999778212	-0.19627362842553	0.27674999778212
2	0.00259202603912	0.08729865935821	0.00259202603912
3	0.08729865935821	0.00259202603912	-0.08729865935821
4	-0.03069623061898	-0.03449615939439	-0.03069623061898
5	0.03449615939439	0.03069623061898	-0.03449615939439
6	-0.00648135793830	-0.00611346925274	-0.00648135793830
7	-0.00611346925274	-0.00648135793830	0.00611346925274
8	0.00522580210401	0.00392849274751	0.00522580210401
9	-0.00392849274751	-0.00522580210401	0.00392849274751
10	0.00099580880668	-0.00125525288530	0.00099580880668
11	-0.00125525288530	0.00099580880668	0.00125525288530
12	-0.00073313713074	0.00092414577227	-0.00073313713074
13	-0.00092414577227	0.00073313713074	0.00092414577227

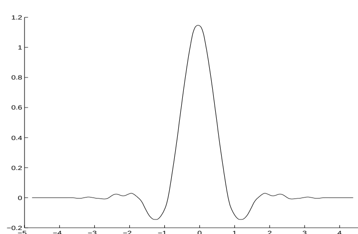


图4.3.4 尺度函数ϕ

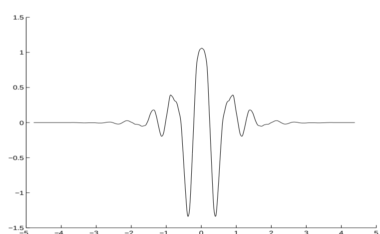
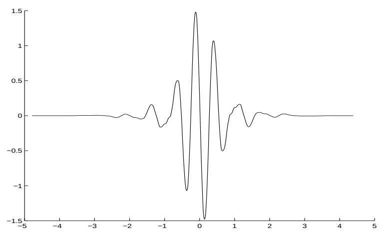


图4.3.5 对称小波ψ_1



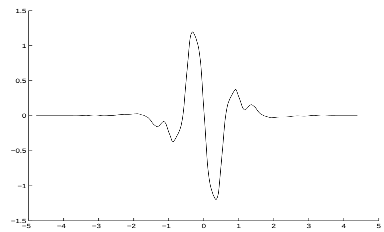


图4.3.6 反对称小波ψ_2　　图4.3.7 对称小波ψ_3

4.4 正交插值小波

众所周知, 当$M = 2$时, 不存在紧支撑并同时具有正交性和插值性的连续函数(见定理2.11.2)。但在伸缩因子$M \geq 3$时, 这样的尺度函数是存在的。下面就是取自 [3]的例子。

当M为奇数时, 定义$M' = (M-1)/2$; 当M为偶数时, 定义$M' = M/2 - 1$。设$\alpha = \frac{M^2-1}{12M^2M'}$, $\gamma = \alpha\sqrt{\frac{12M'(M'+1)}{M^2-1} - 1}$, 并定义

$$H_0^M(\xi)=\frac{2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\xi}}{M^2(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})}\Big(1+\frac{M^2(\alpha+\gamma)}{2}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(M'+1)\xi})$$
$$+\frac{M^2(\alpha-\gamma)}{2}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(M'+1)\xi})\Big), \tag{4.4.1}$$

那么, $\sum_{t=0}^{M-1} H_0^M(\xi+2\pi t/M) = 1$, $\sum_{t=0}^{M-1} |H_0^M(\xi+2\pi t/M)|^2 = 1$, 以及对所有的$|\xi| \leq \pi/M$成立$H_0^M(\xi) \neq 0$。因此, 细分方程

$$\begin{cases} \widehat{\phi}(\xi) &=& H_0^M(\xi/M)\widehat{\phi}(\xi/M), \\ \widehat{\phi}(0) &=& 1 \end{cases}$$

的连续解 ϕ 有正交和插值的整平移。事实上，存在正常数 C 和 $\epsilon > 0$，使得 $|\widehat{\phi}(\xi)| \le C\,(1+|\xi|)^{-1-\epsilon}$。

特别当 $M=3$ 时，$H_0^3(\xi)=\sum_{n=0}^{8} h_0(n)\mathrm{e}^{-(n-4)\mathrm{i}\xi}$，利用 § 3.3 节中的算法我们得到

$$\begin{cases} H_1^3(\xi)=\sum_{n=0}^{8} h_1^3(n)\mathrm{e}^{-(n-4)\mathrm{i}\xi}\,, \\ H_2^3(\xi)=\sum_{n=0}^{8} h_2^3(n)\mathrm{e}^{-(n-4)\mathrm{i}\xi}\,。\end{cases}$$

其相应的系数 $\{h_0^3(n)\}_{n=0}^8$，$\{h_1^3(n)\}_{n=0}^8$ 和 $\{h_2^3(n)\}_{n=0}^8$ 参见下面的表9。

表9: $H_0^3(\xi)$，$H_1^3(\xi)$ 和 $H_2^3(\xi)$ 的系数

n	$\{h_0^3(n)\}_{n=0}^8$	$\{h_1^3(n)\}_{n=0}^8$	$\{h_2^3(n)\}_{n=0}^8$
0	-0.089415317124930	-0.28192736109768	-0.13524072018761
1	0.000000000000000	0.13060193748187	0.03123297165465
2	0.126452354161967	0.39870549766840	0.19125926067443
3	0.401052856472081	-0.19631786455480	0.16384540495874
4	0.333333333333333	0.10510032291365	-0.43948126211850
5	0.191539736120512	-0.16784034606851	0.23721559636480
6	0.021695793986182	0.00684070486145	-0.02860468477113
7	0.000000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000
8	0.015341243050855	0.00483710879563	-0.02022656657537

那么函数 ψ_1，ψ_2

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_1(\xi)=H_1^3(\xi/3)\widehat{\phi}(\xi/3)\,, \\ \widehat{\psi}_2(\xi)=H_2^3(\xi/3)\widehat{\phi}(\xi/3) \end{cases}$$

就是正交小波。下面是当 $M = 3$ 时, 所对应的 ϕ (图4.4.1), ψ_1 (图4.4.2) 和 ψ_2 (图4.4.1) 的图。

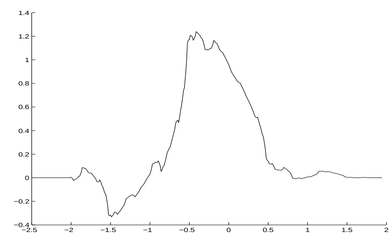


图4.4.1 正交、插值尺度函数ϕ

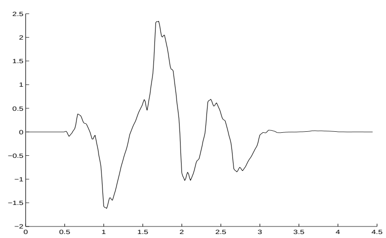


图4.4.2 小波ψ_1

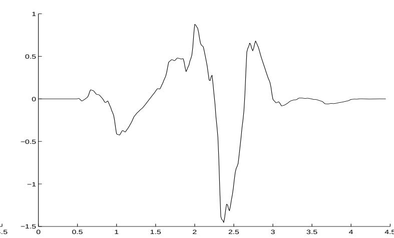


图4.4.3 小波ψ_2

对 $M=4$, 根据 (4.4.1) 我们有 $H_0^4(\xi)=\sum_{n=0}^{10} h_0^4(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-5)\xi}$。同样利用 §3.3 节中的矩阵扩张算法我们得到

$$\begin{cases} H_1^4(\xi) = \sum_{n=0}^{10} h_1^4(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-5)\xi}\,, \\ H_2^4(\xi) = \sum_{n=0}^{10} h_2^4(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-5)\xi}\,, \\ H_3^4(\xi) = \sum_{n=0}^{10} h_3^4(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-5)\xi}\,\text{。} \end{cases}$$

其中系数 $\{h_0^4(n)\}_{n=0}^{10}$, $\{h_1^4(n)\}_{n=0}^{10}$, $\{h_2^4(n)\}_{n=0}^{10}$ 和 $\{h_3^4(n)\}_{n=0}^{10}$ 分别参见下面的表10和表11。

表10：$H_0^4(\xi)=\sum_{n=0}^{10} h_0^4(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-5)\xi}$ 的系数

$h_0^4(0)$	-0.0693201823922454	$h_0^4(6)$	0.2051096352155091
$h_0^4(1)$	0.0000000000000000	$h_0^4(7)$	0.1250000000000000
$h_0^4(2)$	0.0536951823922455	$h_0^4(8)$	-0.0068201823922455
$h_0^4(3)$	0.1250000000000000	$h_0^4(9)$	0.0000000000000000
$h_0^4(4)$	0.3261403647844909	$h_0^4(10)$	-0.0088048176077546
$h_0^4(5)$	0.2500000000000000		

表11: $H_1^4(\xi), H_2^4(\xi)$ 和$H_3^4(\xi)$ 的系数

n	$\{h_1^4(n)\}_{n=0}^{10}$	$\{h_2^4(n)\}_{n=0}^{10}$	$\{h_3^4(n)\}_{n=0}^{10}$
0	0.00000000000000	0.26313033394114	0.00000000000000
1	0.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000
2	0.00000000000000	-0.20381988024721	0.00000000000000
3	0.01388103201165	-0.34063638395456	-0.02477205785507
4	-0.17015224468132	0.10630217105533	-0.17025794108920
5	0.10524583059776	0.06586107097002	0.41483205574361
6	0.32886522738214	0.08034846968590	-0.21980205679934
7	-0.31753125178311	0.03293053548501	0.00000000000000
8	0.01732496841919	-0.00179673806626	0.00000000000000
9	0.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000
10	0.02236643805370	-0.00231957886937	0.00000000000000

因此, 由下式定义的函数 ψ_1, ψ_2, ψ_3 ,

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_1(\xi)=H_1^4(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4)\,, \\ \widehat{\psi}_2(\xi)=H_2^4(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4)\,, \\ \widehat{\psi}_3(\xi)=H_3^4(\xi/4)\widehat{\phi}(\xi/4) \end{cases}$$

是一组连续正交小波。下面是 ϕ (图4.4.4), ψ_1 (图4.4.5), ψ_2 (图4.4.6) 和 ψ_3 (图4.4.7) 所对应的图象。

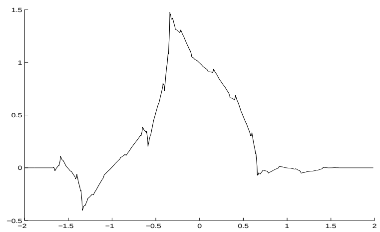


图4.4.4 正交,插值尺度函数ϕ

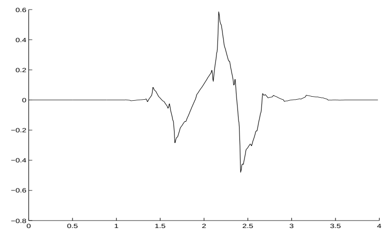


图4.4.5 小波ψ_1

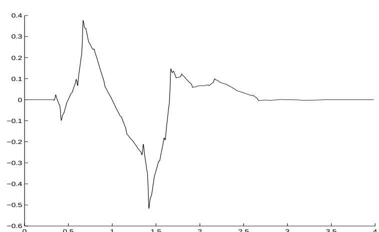


图4.4.6 小波ψ_2

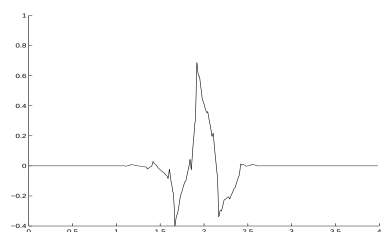


图4.4.7 小波ψ_3

4.5 样条小波

定义 $B_0(x) = \chi_{[0,1)}(x)$, 并归纳地定义 B_N , $N \geq 1$, 为

$$B_N(x) = \int_0^1 B_{N-1}(x-t)\mathrm{d}t, \qquad N \geq 1 。 \tag{4.5.1}$$

显然 B_N 是 $(N-1)$ 次连续可微函数, 支撑于 $[0, N+1]$, 并在 $[k, k+1]$, $0 \leq k \leq N$, 上是一个次数不超过 N 的多项式。

在 (4.5.1) 两边取 Fourier 变换, 我们得到

$$\widehat{B}_N(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{\mathrm{i}\xi}\right)^{N+1} 。 \tag{4.5.2}$$

因此 B_N 满足下列的细分方程

$$\widehat{B}_N(\xi)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/M}}\right)^{N+1}\widehat{B}_N\left(\frac{\xi}{M}\right) 。 \tag{4.5.3}$$

从而, $B-$ 样条 B_N 在伸缩因子为 M 时所对应的符号 $H_{N,0}^M(\xi)$ 为 $\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}M\xi}}{M-M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}}\right)^{N+1}$。由 (4.5.2), 我们知道 B_N 的整平移是稳定的, 但在 $N\geq 1$ 时不是正交的。同时由 (4.5.2) 我们知道 B_N 关于 $(N+1)/2$ 对称。因此, 由 § 3.4 所述, 我们可以从 B_N 构造样条函数所对应的对称和反对称样条小波 $\psi_{N,1}^M,\cdots,\psi_{N,M-1}^M$。下面我们给出在 $M=3$, $N=1,2,3$ 时, 以及在 $M=4$, $N=1,2$ 时的半正交对称和反对称小波表示式。

4.5.1. 伸缩因子 M 为 3, N 为 1 的样条小波

当 $M=3$ 和 $N=1$时, 样条函数 B_1 所对应的符号函数为

$$H_{1,0}^3(\xi)=\frac{1}{9}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}\right)^2 。$$

由 § 3.4 节的矩阵扩张方法, 我们得到

$$\begin{cases} H_{1,1}^3(\xi)=\sum_{n=0}^{2}h_{1,1}^3(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(4-n)\xi}\right), \\ H_{1,2}^3(\xi)=\sum_{n=0}^{4}h_{1,2}^3(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(10-n)\xi}\right) 。\end{cases}$$

所对应的系数 $\{h_{1,1}^3(n)\}_{n=0}^2$ 和 $\{h_{1,2}^3(n)\}_{n=0}^4$ 参见下面的表12。

表12：$H^3_{1,1}(\xi)$ 和$H^3_{1,2}(\xi)$ 的系数

n	$\{h^3_{1,1}(n)\}^2_{n=0}$	$\{h^3_{1,2}(n)\}^4_{n=0}$
0	-0.1571348402636772	0.0075601535271086
1	0.3928371006591930	-0.0302406141084343
2	-0.2357022603955159	0.0907218423253029
3	0.0000000000000000	0.0604812282168686
4	0.0000000000000000	-0.3099662946114516

这样我们定义的函数 $\psi^3_{1,1}$ (图4.5.2) 和 $\psi^3_{1,2}$ (图4.5.3)

$$\begin{cases} \widehat{\psi}^3_{1,1}(\xi) = H^3_{1,1}(\xi/3)\widehat{B}_1(\xi/3)\,, \\ \widehat{\psi}^3_{1,2}(\xi) = H^3_{1,2}(\xi/3)\widehat{B}_1(\xi/3) \end{cases}$$

是半正交的对称和反对称样条小波。

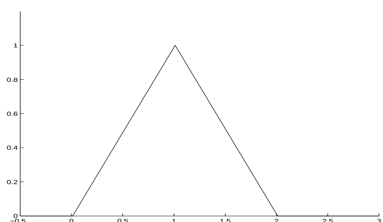
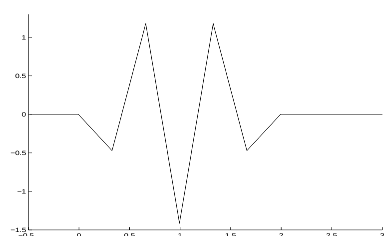


图4.5.1 样条B_1



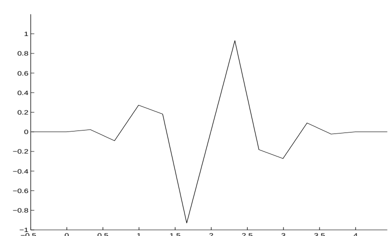


图4.5.2 对称小波$\psi^3_{1,1}$　　　　图4.5.3 反对称小波$\psi^3_{1,2}$

4.5.2. 伸缩因子 M 为 3, N 为 2 的样条小波

当 $M=3$ 和 $N=2$时, 样条函数 B_2 所对应的符号函数为

$$H_{2,0}^3(\xi)=\frac{1}{27}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}\right)^3 。$$

由 § 3.4 节的矩阵扩张方法, 我们得到

$$\begin{cases} H_{2,1}^3(\xi)=\sum_{n=0}^{9} h_{2,1}^3(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(18-n)\xi}\right), \\ H_{2,2}^3(\xi)=\sum_{n=0}^{8} h_{2,2}^3(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(18-n)\xi}\right) 。\end{cases}$$

所对应的系数 $\{h_{2,1}^3(n)\}_{n=0}^9$ 和 $\{h_{2,2}^3(n)\}_{n=0}^8$ 参见下面的表13。

这样我们定义的函数 $\psi_{2,1}^3$ (图4.5.5) 和 $\psi_{2,2}^3$ (图4.5.6) ,

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_{2,1}^3(\xi)=H_{2,1}^3(\xi/3)\widehat{B}_2(\xi/3), \\ \widehat{\psi}_{2,2}^3(\xi)=H_{2,2}^3(\xi/3)\widehat{B}_2(\xi/3) \end{cases}$$

是半正交的对称和反对称样条小波。

表13：$H_{2,1}^3(\xi)$ 和$H_{2,2}^3(\xi)$ 的系数

n	$\{h_{2,1}^3(n)\}_{n=0}^9$	$\{h_{2,2}^3(n)\}_{n=0}^8$
0	-0.0000242492037444	0.0000000000000000
1	-0.0000727476112332	-0.0000096925045219
2	0.0057470612874215	0.0002810826311361
3	-0.0102574131838789	-0.0066587506065687
4	-0.0245159449855830	0.0335457581504138
5	0.0926077090998431	-0.0763672431283186
6	-0.1027923746724889	0.0656570256315814
7	-0.0037828757841256	0.0924858781482949
8	0.1657190583891929	-0.2061401861724938
9	-0.1226282233354037	0.0000000000000000

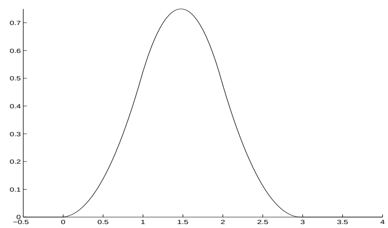


图4.5.4 样条B_2

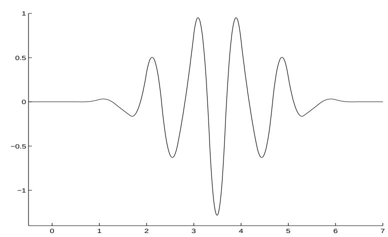


图4.5.5 对称小波$\psi^3_{2,1}$

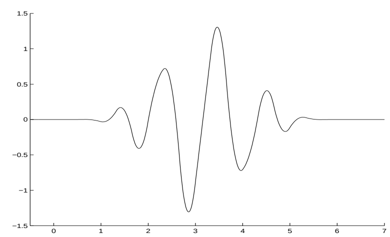


图4.5.6 反对称小波$\psi^3_{2,2}$

4.5.3. **伸缩因子 M 为 3，N 为 3 的样条小波**

当 $M=3$ 和 $N=3$ 时, 样条函数 B_3 (图4.5.7) 所对应的符号函数为

$$H^3_{3,0}(\xi)=\frac{1}{81}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}\right)^4 \text{。}$$

由 § 3.4 节的矩阵扩张方法, 我们得到

$$\begin{cases} H^3_{3,1}(\xi)=\sum_{n=0}^{10}h^3_{3,1}(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(20-n)\xi}\right), \\ H^3_{3,2}(\xi)=\sum_{n=0}^{9}h^3_{3,2}(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(20-n)\xi}\right) \text{。} \end{cases}$$

所对应的系数 $\{h^3_{3,1}(n)\}_{n=0}^{10}$ 和 $\{h^3_{3,2}(n)\}_{n=0}^{9}$ 参见下面的表14, 这样我们定义的函数 $\psi^3_{3,1}$ (图4.5.8) 和 $\psi^3_{3,2}$ (图4.5.9)，

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_{3,1}^3(\xi) = H_{3,1}^3(\xi/3)\widehat{B}_2(\xi/3)\,, \\ \widehat{\psi}_{3,2}^3(\xi) = H_{3,2}^3(\xi/3)\widehat{B}_2(\xi/3) \end{cases}$$

是半正交的对称和反对称样条小波。

表14：$H_{3,1}^3(\xi)$ 和$H_{3,2}^3(\xi)$ 的系数

n	$\{h_{3,1}^3(n)\}_{n=0}^{10}$	$\{h_{3,2}^3(n)\}_{n=0}^{9}$
0	0.0000323964229919	-0.0000000108403285
1	-0.0004316101661172	0.0000013252301640
2	-0.0009387264507718	-0.0001461059480626
3	0.0113378499284903	0.0018177442307436
4	-0.0171364888873682	-0.0154397606959636
5	-0.0226064164177109	0.0534156375785780
6	0.0959712276223890	-0.0916318445449250
7	-0.1108935332630964	0.0500525205019056
8	0.0096382886724050	0.0985092199789392
9	0.1422676406177223	-0.1666554276998986
10	-0.1072406280789341	0.0000000000000000

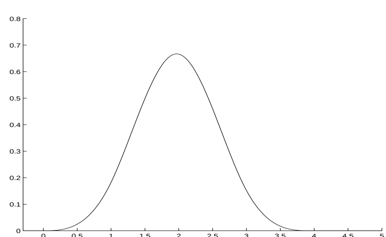


图4.5.7 样条B_3

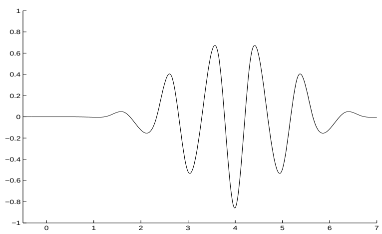


图4.5.8 对称小波$\psi^3_{3,1}$

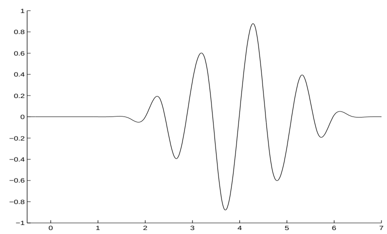


图4.5.9 反对称小波$\psi^3_{3,2}$

4.5.4. 伸缩因子 M 为 4, N 为 1 的样条小波

当 $M = 4$ 和 $N = 1$ 时, 样条函数 B_1 (图4.5.10) 所对应的符号函数为

$$H^4_{1,0}(\xi) = \frac{1}{16}\left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi}\right)^2 \text{。}$$

由 § 3.4 节的矩阵扩张方法, 我们得到

$$\begin{cases} H^4_{1,1}(\xi) = \sum_{n=0}^{7} h^4_{1,1}(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi} + e^{-i(14-n)\xi}\right), \\ H^4_{1,2}(\xi) = \sum_{n=0}^{9} h^4_{1,2}(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi} + e^{-i(18-n)\xi}\right), \\ H^4_{1,3}(\xi) = \sum_{n=0}^{6} h^4_{1,3}(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi} - e^{-i(14-n)\xi}\right) \text{。} \end{cases}$$

所对应的系数 $\{h^4_{1,1}(n)\}_{n=0}^7$, $\{h^4_{1,2}(n)\}_{n=0}^9$ 和 $\{h^4_{1,3}(n)\}_{n=0}^6$ 参见下面的表15。这样我们定义的函数 $\psi^4_{1,1}$ (图4.5.11) $\psi^4_{1,2}$ (图4.5.12) 和 $\psi^4_{1,3}$ (图4.5.13) ,

$$\begin{cases} \widehat{\psi}^4_{1,1}(\xi) = H^4_{1,1}(\xi/4)\widehat{B}_1(\xi/4), \\ \widehat{\psi}^4_{1,2}(\xi) = H^4_{1,2}(\xi/4)\widehat{B}_1(\xi/4), \\ \widehat{\psi}^4_{1,3}(\xi) = H^4_{1,3}(\xi/4)\widehat{B}_1(\xi/4) \end{cases}$$

是半正交的对称和反对称样条小波。

表15：$H_{1,1}^4(\xi)$，$H_{1,2}^4(\xi)$ 和$H_{1,3}^4(\xi)$ 的系数

n	$\{h_{1,1}^4(n)\}_{n=0}^7$	$\{h_{1,2}^4(n)\}_{n=0}^9$	$\{h_{1,3}^4(n)\}_{n=0}^6$
0	-0.007812500000000	-0.005524271728020	-0.001841423909340
1	-0.015625000000000	0.022097086912080	0.007365695637360
2	0.059895833333333	-0.023938510821420	-0.027621358640100
3	-0.031250000000000	-0.022097086912080	0.110485434560398
4	0.013020833333333	0.025779934730760	-0.057084141189539
5	-0.109375000000000	0.014731391274720	0.110485434560398
6	0.184895833333333	-0.025779934730760	-0.384857597052053
7	-0.093750000000000	0.198873782208717	0.000000000000000
8	0.000000000000000	0.029462782549440	0.000000000000000
9	0.000000000000000	-0.213605173483436	0.000000000000000

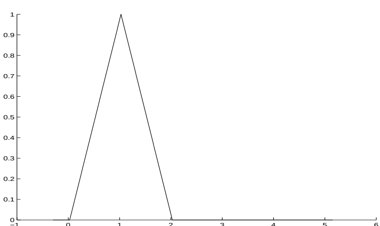


图4.5.10 样条B_1

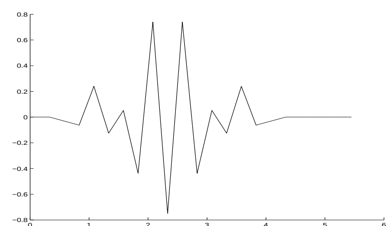


图4.5.11 对称小波$\psi_{1,1}^4$

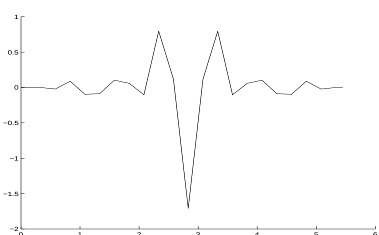


图4.5.12 对称小波$\psi_{1,2}^4$

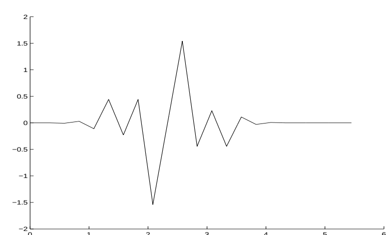


图4.5.13 反对称小波$\psi_{1,3}^4$

4.5.5. 伸缩因子 M 为 4, N 为2的样条小波

当 $M=4$ 和 $N=2$时, 样条函数 B_2 (图4.5.14) 所对应的符号函数为

$$H_{2,0}^4(\xi)=\frac{1}{64}\left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi}\right)^3 。$$

由 § 3.4 节的矩阵扩张方法, 我们得到

$$\begin{cases} H_{2,1}^4(\xi)=\sum_{n=0}^{12} h_{2,1}^4(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(25-n)\xi}\right), \\ H_{2,2}^4(\xi)=\sum_{n=0}^{14} h_{2,2}^4(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-2)\xi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(27-n)\xi}\right), \\ H_{2,3}^4(\xi)=\sum_{n=0}^{10} h_{2,3}^4(n)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-2)\xi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(19-n)\xi}\right) 。\end{cases}$$

其系数 $\{h_{2,1}^4(n)\}_{n=0}^{12}$, $\{h_{2,2}^4(n)\}_{n=0}^{14}$ 和 $\{h_{2,3}^4(n)\}_{n=0}^{10}$ 参见本章最后的表16, 这样我们定义的函数 $\psi_{2,1}^4$ (图4.5.15), $\psi_{2,2}^4$ (图4.5.16) 和 $\psi_{2,3}^4$ (图4.5.17) ,

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_{2,1}^4(\xi)=H_{2,1}^4(\xi/4)\widehat{B}_2(\xi/4), \\ \widehat{\psi}_{2,2}^4(\xi)=H_{2,2}^4(\xi/4)\widehat{B}_2(\xi/4), \\ \widehat{\psi}_{2,3}^4(\xi)=H_{2,3}^4(\xi/4)\widehat{B}_2(\xi/4) \end{cases}$$

是半正交的对称和反对称样条小波。

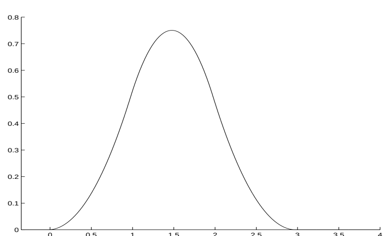


图4.5.14 样条B_2

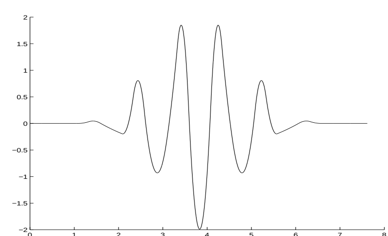


图4.5.15 对称小波$\psi_{2,1}^4$

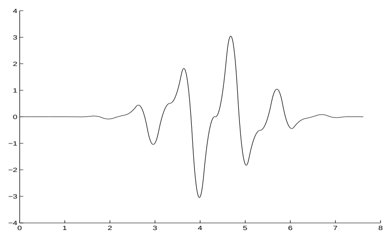


图4.5.16 反对称小波$\psi^4_{2,2}$

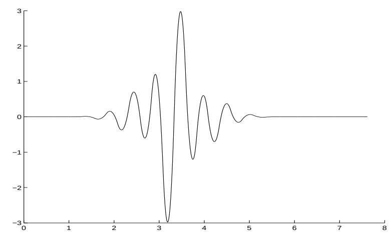


图4.5.17 反对称小波$\psi^4_{2,3}$

表16：$H^4_{2,1}(\xi)$，$H^4_{2,2}(\xi)$ 和$H^4_{2,3}(\xi)$ 的系数

n	$\{h^4_{2,1}(n)\}^{12}_{n=0}$	$\{h^4_{2,2}(n)\}^{14}_{n=0}$	$\{h^4_{2,3}(n)\}^{10}_{n=0}$
0	-0.000004069010	-0.000000089913	-0.000000061680
1	-0.000012207031	0.000002607485	0.000001788720
2	-0.000024414063	-0.000061860334	-0.000042435839
3	0.004125976563	-0.000185581003	0.000986879985
4	-0.003206380208	0.001885751155	-0.005022787362
5	-0.009521484375	-0.004569122988	0.012913139560
6	-0.014819335938	0.000848781333	-0.029854106417
7	0.076733398438	0.004030992027	0.053545147329
8	-0.047204589844	0.024816334143	-0.058767839568
9	-0.065799967448	-0.059070055735	0.105196101888
10	0.020947265625	0.018907683157	-0.218740961726
11	0.163037109375	0.019031403826	0.000000000000
12	-0.124251302083	0.098537128943	0.000000000000
13	0.000000000000	-0.164677695027	0.000000000000
14	0.000000000000	0.003182210693	0.000000000000

参考文献

[1] N. K. Bari. *A Treatise on Trigonometric Series*. Macmillan, 1964

[2] E. Belogay, Yang Wang. Compactly supported orthogonal symmetric scaling functions. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 1999,7: 137∼150

[3] Ning Bi, Xinrong Dai, Qiyu Sun. Construction of compactly supported M-band wavelets. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 1999,6: 113∼131

[4] Ning Bi, Daren Huang. A criterion for orthogonality of refinable functions. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 2001, 16(4): 384∼388

[5] Ning Bi, L. Debnath, Qiyu Sun. Asymptotic behavior of M-band scaling functions of Daubechies type. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 1998,17: 813∼830.

[6] C. de Boor. The polynomials in the linear span of integer translates of a compactly supported function. *Constr. Approx.*, 1987,3: 199∼208

[7] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, C. A. Micchelli. Stationary subdivision. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1991,93: 1∼186

[8] C. K. Chui, Jian-Ao Lian. Construction of compactly supported symmetric and antisymmetric orthonormal wavelets with scale = 3. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 1995,2: 21∼51

[9] C. K. Chui, J. Z. Wang. A cardinal spline approach to wavelets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1991,113: 785∼793

[10] C. K. Chui, J. Z. Wang. A general framework of compactly supported splines and wavelets. *J. Approx. Th.*, 1992,71: 263∼304

[11] C. K. Chui, J. Z. Wang. On compactly supported spline wavelets and a duality principle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1992,330: 903∼915

[12] A. Cohen. *Ondelettes, Analyses Multiresolutions et Traitement Numerique du Signal*. Ph.D. Thesis, Univerisite de Paris IX (Dauphine), France, 1990

[13] A. Cohen. Ondelettes, analyses multiresolution et filters mirrors en quadrature. *Ann. H. Poincaré*, 1990,7: 439～459.

[14] A. Cohen, I. Daubechies. A new technique to estimate the regularity of refinable functions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1996,12: 527～591

[15] A. Cohen, I. Daubechies, J. C. Feauveau. Biorthogonal basis of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1992,45: 485～560

[16] A. Cohen, K. Gröchenig, L. F. Villemoes. Regularity of multivariate refinable functions. *Constr. Approx.*, 1999,15: 241～255

[17] A. Cohen, Qiyu Sun. An arithmetic characterization of the conjugate quadrature filter associated to orthonormal wavelet bases. *SIAM J. Math. Anal.*, 1993,24: 1355～1360

[18] D. Colella, C. Heil. Characterizations of scaling functions: continuous solutions. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1994,15: 496～518

[19] Xinrong Dai, Daren Huang, Qiyu Sun. Some properties of five-coefficient refinement equation. *Archiv Math.*, 1996,66: 299～309

[20] Xinrong Dai, Daren Huang, Qiyu Sun. Local polynomial property and linear independence of refinable distributions. *Archiv Math.*, To appear.

[21] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1988,61: 909∼996

[22] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992

[23] I. Daubechies, J. C. Lagarias. Two-scale difference equation I: existence and global regularity of solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 1991,22: 1388∼1410

[24] I. Daubechies, J. C. Lagarias. Two-scale difference equation II: local regularity, infinite products and fractals. *SIAM J. Math. Anal.*, 1992,23: 1031∼1079

[25] T. Eirola. Sobolev characterization of solutions of dilation equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1992,23: 1015∼1030

[26] N. Dyn, J. A. Gregory. D. Levin. Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design. *Constr. Approx.*, 1991,7: 127∼147

[27] I. M. Gelfand. *Generalized Functions*. Vol.1 & 2 Academic Press, 1964 & 1968

[28] S. S. Goh, V. B. Yap. Matrix extension and biorthogonal multiwavelets. *Linear Algebra Appl.*, 1998,269: 139∼157

[29] K. Gröchenig. Orthogonality criteria for compactly supported scaling functions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1994,1: 242∼245

[30] Bin Han. Symmetric orthonormal scaling functions and wavelets with dilation factor 4. *Adv. Comput. Math.*, 1998,8: 221∼247

[31] C. Heil. Method of solving dilation equations. In "*Prob. and Stoch. Methods in Analysis with Applications*". NATO ASI Series C: Math. Phys. Sci., 1992,327: 15∼45

[32] P. N. Heller. Rank M wavelets with N vanishing moments. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1994,16: 502∼519

[33] P. N. Heller, R. O. Wells, Jr.. Sobolev regularity for rank M wavelets. CML Technical Report TR 96∼08, Computational Mathematics Laboratory, Rice University. 1996

[34] H. Helson. *Harmonic Analysis*. The Wadworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Addison-Wesley, 1983

[35] L. Hervé. Construction et regularite des fonctions d'echelle. *SIAM J. Math. Anal.*, 1995,26: 1361∼1385

[36] Daren Huang, Qiyu Sun. Affine similarity of refinable function. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, 1999,15(3): 81∼91

[37] Daren Huang, Qiyu Sun, Zeyin Zhang. Integral representation of M band Daubechies type. *Chinese Science Bull.*, 1997,42: 803∼807

[38] Daren Huang, Qiyu Sun, Wei Wang. Multiresolution generated by several scaling functions. *Adv. Math.* (China), 1997,26: 165∼180

[39] Daren Huang, Zeyin Zhang. Asymptotic behavior of Gibbs functions for M band wavelet expansions. *Acta Math. Sinica*, 1999,15: 165∼172

[40] R.-Q. Jia. Subdivision schemes in L_p space. *Adv. Comput. Math.*, 1995,3: 309∼341

[41] R.-Q. Jia. C. A. Micchelli. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: powers of two. In "*Curves and Surfaces*", P. J. Laurent, A. L. Méhauté , L. L. Schumaker eds., Academic Press, New York, 1991, 209∼246.

[42] R.-Q. Jia, C. A. Micchelli. On linear independence of integer translate of a finite number of functions. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1993,36: 69~85

[43] R.-Q. Jia, J. Z. Wang. Stability and linear independence associated with wavelet decompositions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993,117: 1115~1124

[44] R.-Q. Jia, Z. Shen. Multiresolution and wavelets. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1994,37: 271~300

[45] K. S. Lau, J. Wang. Characterization of L_p solution for the two scale dilation equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1995,26: 1018~1046

[46] W. Lawton. Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases. *J. Math. Phys.*, 1991,32(1): 57~61

[47] W. Lawton, S. L. Lee, Z. Shen. Complete characterization of refinable spline. *Adv. Comput. Math.*, 1995,3: 137~145

[48] W. Lawton, S. L. Lee, Z. Shen. An algorithm for matrix extension and wavelet construction. *Math. Comp.*, 1996,65: 723~737

[49] R. M. Lewis. Cardinal interpolation multiresolution. *J. Approx. Theory*, 1994,26: 177∼202

[50] S. G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathrm{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989,315: 69∼87

[51] S. G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press , 1998

[52] C. A. Micchelli. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelet. *Numerical Algorithms*, 1991,1: 75∼116

[53] H. L. Resnikoff, J. Tian, R. O. Wells, Jr.. Biorthogonal wavelet space: parameterization and factorization. *SIAM. J. Math. Anal.*, 2001,33: 194∼215

[54] H. L. Resnikoff, R. O. Wells, Jr.. *Wavelet Analysis and Scalable Structure of Information*. Springer–Verlag, N.Y., 1998

[55] A. Ron. A necessary and sufficient condition for the linear independence of the integer translate of a compactly supported distribution. *Constr. Approx.*, 1989,5: 297∼308

[56] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974

[57] W. Rudin, *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973

[58] Xianliang Shi, Qiyu Sun. A class of M-dilation scaling function with regularity growing proportionally to filter support width. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998,126: 3501∼3506

[59] P. M. Soardi. Biorthogonal M-channel compactly supported wavelets. *Constr. Approx.*, 2000,16: 283∼311

[60] G. Strang, G. Fix. A Fourier analysis of the finite element variational method. In "*Constructive Aspects of Functional Analysis*". G. Geymonat eds., C. I. M. E., 1973, 793∼840

[61] Qiyu Sun. Two-scale difference equation: local and global linear independence, Unpublished Manuscript, 1991

[62] Qiyu Sun. A note on the integer translates of a compactly supported distribution on $\mathbb{R}$. *Arch. Math.,* 1993,60: 359∼363

[63] Qiyu Sun, Refinable functions with compact support. *J. Approx. Th.,* 1996,86: 240∼252

[64] Qiyu Sun. Sobolev exponent estimate and asymptotic regularity of the M-band Daubechies's scaling functions. *Constr. Approx.*, 1999,15: 441~465

[65] Qiyu Sun. Construction of symmetric and anti-symmetric M-band wavelets. In "*Wavelet Application in Signal and Image Processing VIII*". Proc. SPIE 4119, A. Aldroubi, A. F. Laine, M. A. Unser eds. 2000, 384~394

[66] Qiyu Sun. Convergence and boundedness of cascade algorithm in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces: Part I. *Adv. Math.* (China), 2000,29: 507~526

[67] Qiyu Sun. Convergence and boundedness of cascade algorithm in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces: Part II. *Adv. Math.* (China), 2001,30: 20~36

[68] Qiyu Sun. Stability of the shifts of global supported distributions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001,261: 113~125

[69] Qiyu Sun. M band scaling function with minimal support are asymmetric. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, To appear.

[70] Qiyu Sun, Zeyin Zhang. M-band scaling function with filter having vanishing moments two and minimal length. *J. Math. Anal. Appl.*, 1998,222: 225~243

[71] R. W. Suter. *Multirate and Wavelet Signal Processing*. Academic Press, 1998

[72] J. Tian, R. O. Wells, Jr.. An algebraic structure of orthogonal wavelet space. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 2000,8: 223~248

[73] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1993

[74] L. F. Villemoes. Wavelet analysis of refinement equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1994,25: 1433~1466

[75] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌编著. 实变函数论与泛函分析(下册). 北京: 人民教育出版社, 1979

[76] Zeyin Zhang, Qiyu Sun. Factorization of unimodular matrices, filter banks and biorthogonal wavelets. Preprint 2001

[77] Kang Zhao. Global linear independence and finitely supported dual basis. *SIAM J. Math. Anal.*, 1992,23: 1352~1355

索　引

三画

广义函数 (1), (8)

四画

分段多项式 (82)
分段光滑函数 (83)
分布 (9)
反对称 (74)
尺度函数 (90), (92)
互相正交 (11)
亏格 (125)
内积 (10)
内积空间 (1), (10)
双正交小波 (120), (134)
双正交多分辨分析 (121)
双正交尺度函数 (121)

五画

半正交小波 (110), (134)
半卷积 (52)
对称 (74)
可积函数 (5)
正交 (11), (44)
正交补 (11)
正交分解定理 (11)
正交小波 (100), (134)
正交尺度函数 (100)

六画

多分辨分析 (89)
划分 (22)

七画

级联序列 (68)
局部多项式 (83)
局部线性无关 (56)
局部线性无关的整平移 (56)

八画

非平凡不变圈 (19)
卷积 (6)
实 Hilbert 空间 (10)
细分算子 (69)
细分方程 (13)
细分分布 (13)
线性无关 (52)

线性无关的整平移 (52)
周期函数 (1)
周期 (1)
周期信号 (1)

九画
相对次数 (108)

十一画
符号 (13)
惟一性定理 (3)
斜内积 (118)

十二画
插值性 (79)
联合谱半径 (35)
帽函数 (79)
缓增分布 (9)

十四画
稳定的整平移 (38)

十五画
整体线性无关 (52)

Cauchy 序列 (7)
Cesàro 平均 (4)
Fourier 变换 (1), (5), (52)
Fourier 逆变换 (7)
Fejer 核 (4)
Fourier 系数 (3)
Fourier 级数 (1),(3)
Fourier 级数的部分和 (3)
Fourier 指数 (19)
Fourier–Lapalace 变换 (52)
ℓ^1 衰减的缓增分布 (37)
$L^p_{([0,T])}$ 空间 (2)
$L^p_{([0,T])}$ 范数 (2)
p 可积函数 (5)
Paley-Wiener 定理 (16)
Parseval 恒等式 (3), (6)
Poisson 求和公式 (7)
Rieman 引理 (3)
sinc 函数 (79)
Strong-Fix 条件 (64)
Schwartz 函数类 (9)
Sobolev 指数 (19)